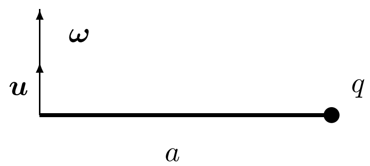
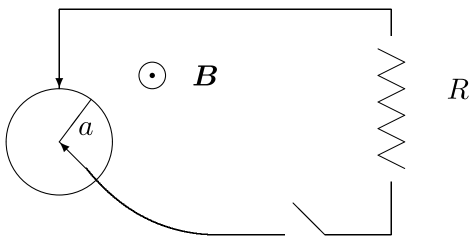
Corso di Laurea in Chimica Industriale
Fisica Generale (secondo corso)
II esonero – 19 dicembre 2000

Esercizio 1
Una barra di lunghezza $a = 10$ cm ruota con velocita angolare costante $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}\omega$, con $\omega = 30$ rad s^{-1}, attorno all'asse individuato dal versore $\boldsymbol{u}$ perpendicolare ad un estremo della barra. Sull'altro estremo della barra è posizionata una carica $q = 3.0 \times 10^{-4}$ C. Calcolare:
a) il momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{m}$ del sistema,
b) l'espressione del campo magnetico $\boldsymbol{B}$ generato nel punto P dell'asse $\boldsymbol{u}$ a distanza x dalla barra,
c) l'espressione della forza esercitata su un dipolo magnetico $\boldsymbol{m}_0$ posto in P e parallelo a $\boldsymbol{m}$.



Esercizio 2 Un disco conduttore di raggio $a = 50$ cm ruota con velocita angolare $\omega_0 = 60$ rad s^{-1} intorno all'asse ortogonale al disco e passante per il suo centro. Il momento di inerzia del disco rispetto a tale asse è $I = 0.1$ Kg m^2. Il disco è immerso in un campo magnetico $B = 0.8$ T uniforme e costante parallelo al suo asse di rotazione. Tramite due contatti striscianti, il centro e il bordo del disco sono connessi ad un circuito di resistenza $R = 1$ Ω. Il circuito è munito di un interruttore che viene chiuso all'istante $t = 0$. Calcolare:
a) l'espressione della corrente che fluisce nel circuito,
b) l'espressione del momento frenante che si esercita sul disco,
c) l'istante di tempo t_1 a cui la velocita angolare del disco si è ridotta al valore $\omega_0/2$,
d) l'energia dissipata in calore nella resistenza fino all'arresto del disco.



Operatore $\boldsymbol{\nabla}$ in coordinate sferiche

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} f(r,\theta,\phi) &= \frac{\partial f}{\partial r}\boldsymbol{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\boldsymbol{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\boldsymbol{u}_\phi \\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} \\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}(r,\theta,\phi) &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]\boldsymbol{u}_r \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} - \frac{\partial(rA_\phi)}{\partial r}\right]\boldsymbol{u}_\theta \\
&\quad + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\boldsymbol{u}_\phi
\end{aligned}
$$

Costanti Fisiche

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 8.8542\times10^{-12}\ \mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}} \\
e &= 1.6022\times10^{-19}\ \mathrm{C} \\
\mu_0 &= 4\pi\times10^{-7} = 1.2566\times10^{-6}\ \mathrm{Hm^{-1}}
\end{aligned}
$$

Esercizio 1 La carica q in rotazione a velocita angolare ω genera una corrente di valore

$$i = \frac{q}{T} = \frac{q\omega}{2\pi} \tag{1}$$

cui corrisponde un momento di dipolo magnetico

$$\boldsymbol{m} = \frac{q\omega}{2\pi}\ \pi a^2\ \boldsymbol{u} = \frac{1}{2} q a^2 \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{u}\ 4.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{Am}^2. \tag{2}$$

Nel punto P il campo $\boldsymbol{B}$ generato dalla corrente i vale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \oint \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + x^2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}} \boldsymbol{u} \\ &= \frac{\mu_0 q \omega a^2}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \boldsymbol{u}. \end{aligned} \tag{3}$$

Alternativamente $\boldsymbol{B}$ può essere ottenuto come media temporale su un periodo del campo generato dalla carica puntiforme q in moto con velocita $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times a\boldsymbol{n}$, essendo $\boldsymbol{n}$ il versore istantaneo ortogonale a $\boldsymbol{u}$ che indica la posizione di q rispetto al punto di rotazione. Il valore istantaneo di tale campo è

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}_{ist} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\omega a^2}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \boldsymbol{u} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\omega a x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \boldsymbol{n}. \end{aligned} \tag{4}$$

Mediando su un periodo di rotazione la componente di $\boldsymbol{B}_{ist}$ perpendicolare a $\boldsymbol{u}$ si annulla e quindi $\langle \boldsymbol{B}_{ist} \rangle = \boldsymbol{B}$.
L'energia di interazione del dipolo $\boldsymbol{m}_0$ con il campo $\boldsymbol{B}$ è

$$U = -\boldsymbol{m}_0 \cdot \boldsymbol{B} = -\frac{\mu_0 q \omega a^2 m_0}{4\pi (a^2 + x^2)^{3/2}} \tag{5}$$

e la forza che viene esercitata su di esso è data da

$$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U = -\frac{3\mu_0 q \omega a^2 m_0 x}{4\pi (a^2 + x^2)^{5/2}} \boldsymbol{u}. \tag{6}$$

Tale forza risulta attrattiva.

Esercizio 2 Sia $\boldsymbol{\omega}$ la velocita angolare del disco al generico istante t dopo la chiusura del circuito. In ciascun punto del disco individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$ rispetto al centro C viene indotto il campo elettrico $\boldsymbol{E}_i = (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B}$. Nel circuito è presente una f.e.m. di valore

$$f = \oint \boldsymbol{E}_i \cdot d\boldsymbol{l} = \int_0^a \omega r B dr = \frac{1}{2}\omega B a^2, \tag{7}$$

che fa circolare una corrente

$$i = \frac{f}{R} = \frac{\omega B a^2}{2R}. \tag{8}$$

Sull'elemento infinitesimo $d\boldsymbol{r}$ agisce la forza di Laplace $d\boldsymbol{F} = i d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}$ cui corrisponde un momento infinitesimo rispetto a C pari a $d\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F}$. Il momento totale è

$$\boldsymbol{M} = \int \boldsymbol{r} \times (i d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}) = -\int_0^a \frac{\boldsymbol{\omega} B a^2}{2R} \; B r dr = -\frac{B^2 a^4}{4R}\boldsymbol{\omega}. \tag{9}$$

L'equazione del moto del disco proiettata lungo l'asse parallelo a $\boldsymbol{\omega}$ è

$$I\frac{d\omega}{dt} = -\frac{B^2 a^4}{4R}\omega \tag{10}$$

ed ha soluzione

$$\omega(t) = \omega_0 \exp\left(-\frac{B^2 a^4}{4RI} t\right). \tag{11}$$

L'istante t_1 definito dalla condizione $\omega(t_1) = \omega_0/2$ vale

$$t_1 = \ln 2 \frac{4RI}{B^2 a^4} = 6.93 \text{ s}. \tag{12}$$

La potenza Joule dissipata nella resistenza è $P = Ri^2$. L'energia dissipata nella resistenza fino all'arresto del disco è pari alla energia cinetica iniziale del disco

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\infty P dt = \frac{B^2 a^4}{4R} \int_0^\infty \omega(t)^2 dt \\ &= \frac{B^2 a^4}{4R} \int_0^\infty \omega_0^2 \exp\left(-\frac{B^2 a^4}{2RI} t\right) dt = \frac{1}{2} I \omega_0^2 = 180 \text{ J}. \end{aligned} \tag{13}$$