COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 23 marzo 2006

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx$$

[punteggio 5]

Si ossservi, per iniziare, che l'integrale improprio esiste e si ha

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx$$

La funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z-i)^2(z+i)^2}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei due poli doppi in $z = \pm i$. L'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso $C = L_R \cup C_R$ dove $L_R = \{z(x) = x,\ -R \le x \le R\}$ e $C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\}$ vale quindi, per $R > 1$,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx + \int_{C_R} f(z)\ dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) \\ &= 2\pi i\ \phi'(i) \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

avendo utilizzato per il calcolo del residuo la decomposizione $f(z) = \phi(z)/(z-i)^2$ con $\phi(z) = 1/(z+i)^2$ analitica e non nulla in $z = i$. Poiché

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\ dz = 0$$

prendendo il limite $R \to \infty$ dell'integrale su C si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

e quindi

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2}\ dx = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 2 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}$$

[punteggio 6]

Ponendo $e^{i\theta} = z$ si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \int_C f(z)\ dz$$

dove $C = \{z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ e

$$f(z) = \frac{-2i}{z^2+4z+1}$$

La funzione $f(z)$ ha due poli semplici in

$$z_\pm = -2 \pm \sqrt{3}$$

Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino C mentre quello in z_- è esterno e quindi

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) \\ &= 2\pi i \left.\frac{-2i}{z-z_-}\right|_{z=z_+} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

Esercizio 3 Determinare il massimo di $|\sin z|$ per $z \in Q$, dove $Q = \{z = x + iy, \ -1 \le x \le 1, \ -1 \le y \le 1\}$.

[punteggio 5]

Si osservi innanzitutto che $|\sin z|$ è continua e Q è compatto, dunque $|\sin z|$ ha massimo in Q. Poiché $\sin z$ è analitica in Q, per il teorema del massimo modulo $|\sin z|$ non può assumere il massimo in Q°. Il massimo di $|\sin z|$ va pertanto cercato su ∂Q. Si ha

$$\begin{aligned}
|\sin z|^2 &= \frac{e^{i(x+iy)} - e^{-i(x+iy)}}{2i} \frac{e^{-i(x-iy)} - e^{+i(x-iy)}}{-2i} \\
&= \frac{e^{-2y} - e^{i2x} - e^{-i2x} + e^{2y}}{4} \\
&= \frac{-e^{i2x} - e^{-i2x} + 2}{4} + \frac{e^{-2y} + e^{2y} - 2}{4} \\
&= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 + \left(\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&= \sin^2 x + \sinh^2 y
\end{aligned}$$

Sui lati $y = \pm 1$ il massimo di $|\sin z|$ è assunto per $x = \pm 1$. Sui lati $x = \pm 1$ il massimo di $|\sin z|$ è assunto per $y = \pm 1$. In conclusione, $|\sin z|$ assume il valore massimo $(\sin^2 1 + \sinh^2 1)^{1/2}$ nei quattro veritici $z = (\pm 1, \pm 1)$.

Esercizio 4 Determinare il numero di radici dell'equazione

$$az^n = \sin z$$

nell'interno del quadrato $Q = \{z = x + iy, \ -1 \leq x \leq 1, \ -1 \leq y \leq 1\}$ nel caso in cui n sia intero e $a \in \mathbb{C}$ con $|a| > e$.

[punteggio 5]

Si ponga $f(z) = az^n$ e $g(z) = -\sin z$. Entrambe queste funzioni sono analitiche per $z \in Q$. Inoltre $|f(z)| > |g(z)|$ per $z \in \partial Q$. Infatti per z sul bordo del quadrato Q si ha

$$|az^n|^2 = |a|^2 \, |z|^2 > 2e^2$$

$$|\sin z|^2 \leq \sin^2 1 + \sinh^2 1 < 1 + e^2$$

Pertanto, per il teorema di Rouché la funzione $f(z) + g(z)$ ha in Q° lo stesso numero di zeri, contando la molteplicità, della funzione $f(z)$, che ne ha evidentemente n (zero di molteplicità n in $z = 0$). In conclusione, l'equazione $az^n = \sin z$ ha n radici per $z \in Q^\circ$.

Esercizio 5 Dimostrare il lemma di Jordan.
Sia $f(z)$ analitica in $A = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R_0 \text{ e } \operatorname{Im} z \geq 0\}$ e si consideri il cammino $C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ R > R_0\} \subset A$. Se $\exists\ M_R > 0$ tale che $|f(z)| \leq M_R\ \forall\ z \in C_R$ e $\lim_{R\to\infty} M_R = 0$, allora

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0 \qquad \forall\ a > 0$$

[punteggio 6]

In base alla definizione di integrale e usando la parametrizzazione del cammino C_R

$$\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = \int_0^{\pi} f(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}d\theta$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| &\leq \int_0^{\pi} \left|f(Re^{i\theta})e^{iaRe^{i\theta}}iRe^{i\theta}\right| d\theta \\
&\leq M_R R \int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}d\theta \\
&= 2M_R R \int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta
\end{aligned}$$

Si osservi che per $\theta \in [0, \pi/2]$ si ha $\sin\theta \geq 2\theta/\pi$. Di consequenza, essendo $aR > 0$, vale la disugualianza di Jordan

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}d\theta &\leq \int_0^{\pi/2} e^{-aR2\theta/\pi}d\theta \\
&= \left[-\frac{\pi}{2aR}e^{-2aR\theta/\pi}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{\pi}{2aR}\left(1 - e^{-aR}\right)
\end{aligned}$$

In conclusione,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz\right| &\leq 2M_R R\,\frac{\pi}{2aR}\left(1 - e^{-aR}\right) \\
&= \frac{\pi M_R}{a}\left(1 - e^{-aR}\right) \xrightarrow{R\to\infty} 0
\end{aligned}$$

Esercizio 6 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}\,dx \qquad -1<a<1$$

[punteggio 6]

Si ponga

$$f(z)=\frac{z^a}{z^2+1}=\frac{e^{a\log z}}{z^2+1} \qquad |z|>0 \qquad 0<\arg z<2\pi$$

Nel dominio specificato $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione dei due poli semplici in $z=\pm i$ dove ha residui

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)=\left.\frac{e^{a\log z}}{z+i}\right|_{z=i}=\frac{e^{a(\ln 1+i\pi/2)}}{i+i}=\frac{e^{i\pi a/2}}{2i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)=\left.\frac{e^{a\log z}}{z-i}\right|_{z=-i}=\frac{e^{a(\ln 1+i3\pi/2)}}{-i-i}=\frac{e^{i3\pi a/2}}{-2i}$$

L'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso $C=L_1\cup C_R\cup L_2\cup C_\rho$ dove $L_1=\{z(x)=x+i0,\ \rho\le x\le R\}$, $C_R=\{z(\theta)=Re^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$, $L_2=\{z(x)=x-i0,\ R\ge x\ge\rho\}$ e $C_\rho=\{z(\theta)=\rho e^{i\theta},\ 2\pi\ge\theta\ge 0\}$ vale quindi, per $R>1$ e $\rho<1$,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\,dz &= \int_{L_1} f(z)\,dz+\int_{C_R} f(z)\,dz+\int_{L_2} f(z)\,dz+\int_{C_\rho} f(z)\,dz\\
&= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right]\\
&= \pi\left(e^{i\pi a/2}-e^{i3\pi a/2}\right)
\end{aligned}$$

Per i singoli integrali si ha

$$\int_{L_1} f(z)\,dz=\int_\rho^R \frac{e^{a(\ln x+i0)}}{(xe^{i0})^2+1}e^{i0}dx=\int_\rho^R\frac{e^{a\ln x}}{x^2+1}dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\,dz=\int_R^\rho \frac{e^{a(\ln x+i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2+1}e^{i2\pi}dx=-e^{i2\pi a}\int_\rho^R\frac{e^{a\ln x}}{x^2+1}dx$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right|\le\frac{e^{a\ln R}}{R^2-1}\,2\pi R\xrightarrow{R\to\infty}0 \qquad \text{se } a<1$$

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz\right|\le\frac{e^{a\ln\rho}}{1-\rho^2}\,2\pi\rho\xrightarrow{\rho\to 0}0 \qquad \text{se } -1<a$$

In conclusione, prendendo i limiti $R\to\infty$ e $\rho\to 0$ per $-1<a<1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty\frac{x^a}{x^2+1}\,dx &= \frac{\pi\left(e^{i\pi a/2}-e^{i3\pi a/2}\right)}{1-e^{i2\pi a}}=\frac{\pi e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a/2}-e^{i\pi a/2}\right)}{e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a}-e^{i\pi a}\right)}\\
&= \frac{\pi\sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)}=\frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)}
\end{aligned}$$