COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 23 marzo 2007

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	

Esercizio 1 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx$$

[punteggio 11]

Posto

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2+1} \qquad \log z = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

e detto $C = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\rho$ il cammino chiuso di integrazione con

$$\begin{array}{rr} L_1 = \{z(x) = x,\ \rho \le x \le R\} & L_2 = \{z(x) = xe^{i\pi},\ R \ge x \ge \rho\} \\ C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\} & C_\rho = \{z(\theta) = \rho e^{i\theta},\ \pi \ge \theta \ge 0\} \end{array}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = i$ (si osservi che $f(z) = (\log(z)/(z+i))/(z-i)$, per $R > 1$ e $\rho < 1$ si ha

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\ dz &= \int_{L_1} f(z)\ dz + \int_{C_R} f(z)\ dz + \int_{L_2} f(z)\ dz + \int_{C_\rho} f(z)\ dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} [f(z)] = 2\pi i \frac{\log\left(1e^{i\pi/2}\right)}{i+i} = i\frac{\pi^2}{2} \end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\ dz = \int_\rho^R \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\ dz = \int_R^\rho \frac{\ln x + i\pi}{x^2+1}\ e^{i\pi} dx = \int_\rho^R \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx + i\pi \int_\rho^R \frac{1}{x^2+1}\ dx$$

$$\int_{C_R} f(z)\ dz = \int_0^\pi \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta}+1}\ iRe^{i\theta} d\theta \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{C_\rho} f(z)\ dz = \int_\pi^0 \frac{\ln \rho + i\theta}{\rho^2 e^{2i\theta}+1}\ i\rho e^{i\theta} d\theta \stackrel{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

e quindi nel limite $\rho \to 0$ e $R \to \infty$

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\ dx = i\frac{\pi^2}{2}$$

da cui prendendo la parte reale e quella immaginaria

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx = 0 \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\ dx = \frac{\pi}{2}$$

<u>Esercizio 2</u> Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx$$

Suggerimento: si consideri il cammino rettangolare di vertici $\pm R$ e $\pm R + i\pi$ e la funzione $f(z) = \ldots$.

[punteggio 11]

Si ponga $f(z) = e^{iz}/(e^z + e^{-z})$ e $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ con

$$L_1 = \{z(x) = x, \ -R \leq x \leq R\}, \qquad L_2 = \{z(y) = R + iy, \ 0 \leq y \leq \pi\},$$
$$L_3 = \{z(x) = x + i\pi, \ R \geq x \geq -R\}, \qquad L_4 = \{z(y) = -R + iy, \ \pi \geq y \geq 0\}.$$

Poiché $f(z) = p(z)/q(z)$ con $p(z) = e^{iz}$ e $q(z) = e^z + e^{-z}$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei poli semplici corrispondenti agli zeri semplici di $q(z)$, che sono i punti $z = \pm i\pi/2 + i2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, per il teorema dei residui si ha

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\pi/2} f(z) = 2\pi i \frac{p(i\frac{\pi}{2})}{q'(i\frac{\pi}{2})} = \pi e^{-\pi/2}.$$

D'altro canto

$$\int_C f(z)dz = \int_{L_1} f(z)dz + \int_{L_2} f(z)dz + \int_{L_3} f(z)dz + \int_{L_4} f(z)dz$$

con

$$\int_{L_1} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx,$$

$$\int_{L_3} f(z)dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{i(x+i\pi)}}{e^{x+i\pi} + e^{-(x+i\pi)}} dx = e^{-\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx.$$

Per la disugualianza di Darboux

$$\left| \int_{L_2} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

$$\left| \int_{L_4} f(z)dz \right| \leq \frac{\pi}{e^R - e^{-R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0,$$

quindi nel limite $R \to \infty$ si ha

$$\left(1 + e^{-\pi}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{e^x + e^{-x}} dx = \pi e^{-\pi/2}$$

da cui prendendo la parte reale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{e^x + e^{-x}} dx = \frac{\pi}{e^{\pi/2} + e^{-\pi/2}}$$

Esercizio 3 Dimostrare il seguente teorema [principio di riflessione]. Sia $f(z)$ analitica in $D \subset \mathbb{C}$ aperto, connesso e simmetrico rispetto a $\mathbb{R}$. Allora, $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ se e solo se $f(x)$ è reale $\forall x \in D \cap \mathbb{R}$.

[punteggio 11]

Posto $z = x + iy$ e $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, si definisca $F(z) = \overline{f(\overline{z})} = U(x,y) + iV(x,y)$. Poiché $\overline{f(\overline{z})} = u(x,-y) - iv(x,-y)$, si ha

$$U(x,y) = u(x,-y), \qquad V(x,y) = -v(x,-y), \tag{1}$$

da cui segue

$$U_x = u_x, \qquad U_y = -u_y, \qquad V_x = -v_x, \qquad V_y = v_y, \tag{2}$$

$\forall (x,y) \in D$. Poiché f è analitica in D, in tale dominio le funzioni u e v sono infinitamente derivabili e valgono le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$. Da queste e dalla (2) si ha quindi

$$U_x = V_y, \qquad U_y = -V_x, \tag{3}$$

con U_x, U_y, V_x e V_y continue $\forall (x,y) \in D$. Pertanto $F(z)$ è analitica in D. Se $f(x)$ è reale $\forall x \in D \cap \mathbb{R}$, allora in tali punti $v(x,0) = V(x,0) = 0$ e quindi $F(x) = U(x,0) = u(x,0) = f(x)$. Le due funzioni f e F, analitiche in D, coincidono in $D \cap \mathbb{R}$ e pertanto devono coincidere in tutto D, cioé $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ $\forall z \in D$. Viceversa, se $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, cioé $F(z) = f(z)$ $\forall z \in D$, allora $\forall x \in D \cap \mathbb{R}$ deve aversi $-v(x,0) = v(x,0)$. Questo è possibile solo se $v(x,0) = 0$, cioé se $f(x)$ è reale.