METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 1 febbraio 2005

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare e rappresexntare graficamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$\left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2$$

[punteggio 5]

La disugualianza proposta è equivalente a

$$|z-3| < 2\,|z+3|$$

ovvero, posto $z = x + iy$,

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} < 2\sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$

Quadrando e semplificando si ha

$$x^2 + y^2 + 10x + 9 > 0$$

ovvero

$$(x+5)^2 + y^2 > 16 \qquad |z+5| > 4$$

che rappresenta l'insieme dei punti esterni al cerchio di raggio 4 centrato in $z = -5$.

Esercizio 2 Calcolare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano complesso

$$(a) \quad z^4 + z^2 + 1 = 0 \qquad (b) \quad z^3 - i = 0$$

[punteggio 6]

(a) Posto $w = z^2$, l'equazione da risolvere è equivalente a

$$w^2 + w + 1 = 0$$

che ha soluzioni

$$w_\pm = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si prendano poi le due radici distinte dell'equazione $z = \sqrt{w_\pm}$

$$z_{k\pm} = \sqrt{-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{e^{i(\pi \mp \pi/3)}} = e^{i(\pi \mp \pi/3 + 2\pi k)/2} \qquad k = 0, 1$$

In conclusione, l'equazione assegnata ha quattro soluzioni distinte

$$\begin{aligned} z_{0\pm} &= e^{i(\pi/2 \mp \pi/6)} = i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mp i\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{1\pm} &= e^{i(\pi/2 \mp \pi/6 + \pi)} = -i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \mp i\frac{1}{2}\right) = \mp\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

(b) Le soluzioni distinte dell'equazione assegnata sono

$$z_k = \sqrt[3]{i} = \left(e^{i(\pi/2)}\right)^{1/3} = e^{i(\pi/2 + 2\pi k)/3} \qquad k = 0, 1, 2$$

cioé esplicitamente

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ z_1 &= e^{i5\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ z_2 &= e^{i3\pi/2} = -i \end{aligned}$$

Esercizio 3 Calcolare il valore numerico di

$$\cos\left(3\arccos\left(\frac{1}{7}\right)\right)$$

[punteggio 5]

Posto $\theta = \arccos(1/7)$ dalla formula di de Moivre si ha

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

e quindi

$$\cos 3\theta = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^3\right) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$

Usando $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ e $\cos\theta = 1/7$ si ottiene

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = 4\frac{1}{7^3} - 3\frac{1}{7} = -\frac{143}{343}$$

<u>Esercizio 4</u> Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta

$$(a)\quad \lim_{z\to i}\frac{z}{z^2+1} \qquad (b)\quad \lim_{z\to i}\frac{\sqrt{z}}{z} \qquad (c)\quad \lim_{z\to i}\frac{z^4-z^3-z^2+z}{z+1}$$

Si assuma $\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{i\theta/2}$ con $r\geq 0$ e $-\pi<\theta\leq\pi$.

[punteggio 6]

(a) Risulta

$$\lim_{z\to i}\frac{z}{z^2+1}=\infty$$

Infatti, posto $f(z)=z/(z^2+1)$ si ha, per la continuità dei polinomi in $\mathbb{C}$,

$$\lim_{z\to i}\frac{1}{f(z)}=\lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z}=\frac{i^2+1}{i}=0$$

(b) Per la continuità della funzione $\sqrt{z}$ quando $-\pi<\operatorname{Arg} z<\pi$ e della funzione identità in $\mathbb{C}$, risulta

$$\lim_{z\to i}\frac{\sqrt{z}}{z}=\frac{\sqrt{i}}{i}=\frac{e^{i\pi/4}}{i}=\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(c) Per la continuità dei polinomi si ha

$$\lim_{z\to i}\frac{z^4-z^3-z^2+z}{z+1}=\frac{1-(-i)-(-1)+i}{i+1}=2$$

Esercizio 5 Dimostrare che la funzione $f(z) = 1/z$ non è uniformemente continua in $A = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| \leq 2\}$.

[punteggio 5]

Se $f(z)$ fosse uniformemente continua in A, comunque scelto $\varepsilon > 0$ esisterebbe $\delta(\varepsilon)$ tale che $\forall z, w \in A$ con $|z - w| < \delta$ allora $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$. Mostriamo che esistono coppie di punti $z, w \in A$ per i quali tale proprietà è falsa.

Si fissi arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e si scelgano z e w reali nella forma $z = \delta$ e $w = \delta/(1 + \varepsilon)$ con δ arbitrariamente piccolo. Risulta

$$|z - w| = \delta - \frac{\delta}{1 + \varepsilon} = \delta \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} < \delta$$

Inoltre, purché $\delta < 1$, si ha

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{w} \right| = \frac{1 + \varepsilon}{\delta} - \frac{1}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta} > \varepsilon$$

Dalla arbitrarietà di δ segue l'asserto.

Esercizio 6 Dimostrare che la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 - 2xy - 3x^2y + y^3$$

è armonica nel dominio specificato. Determinare la funzione $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armonica coniugata alla $u(x, y)$.

[punteggio 6]

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$u_x(x, y) = 2x - 2y - 6xy \qquad u_{xx}(x, y) = 2 - 6y$$

$$u_y(x, y) = -2y - 2x - 3x^2 + 3y^2 \qquad u_{yy}(x, y) = -2 + 6y$$

e dunque $u_{xx} + u_{yy} = 0$, cioé u è armonica in $\mathbb{R}^2$.
La funzione v è armonica coniugata a u in $\mathbb{R}^2$ se e solo se la funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathbb{C}$. Dalla prima delle equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, si ha

$$2x - 2y - 6xy = v_y$$

che integrata rispetto a y fornisce

$$v(x, y) = 2xy - y^2 - 3xy^2 + \phi(x)$$

Imponendo la seconda equazione di Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$, si ha

$$-2y - 2x - 3x^2 + 3y^2 = 2y - 3y^2 + \phi'(x)$$

che integrata rispetto a x fornisce

$$\phi(x) = x^2 + x^3 + \text{const}$$

In conclusione, a meno di una costante,

$$v(x, y) = 2xy - y^2 + x^2 - 3xy^2 + x^3$$

Posto $z = x + iy$, si ha

$$u(x, y) + iv(x, y) = (1 + i)z^2 + iz^3 = f(z)$$

con $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$.