METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 2 febbraio 2006

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $\text{Re}(z^n) \geq 0$ per ogni intero positivo n. Mostrare che z è un numero reale non negativo.

[punteggio 5]

Usando la rappresentazione esponenziale

$$z = re^{i\theta} \qquad r \geq 0 \qquad -\pi < \theta \leq \pi$$

si ottiene immediatamente che la disugualianza $\text{Re}(z^n) = \text{Re}(r^n e^{in\theta}) \geq 0$ è equivalente a

$$\cos(n\theta) \geq 0$$

ovvero

$$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq n\theta \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

che, dividendo per n, fornisce

$$\frac{2\pi k - \pi/2}{n} \leq \theta \leq \frac{2\pi k + \pi/2}{n} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dall'arbitrarietà di n risulta $\theta = 0$, cioé $z = r$ reale non negativo.

Esercizio 2 Calcolare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano complesso

$$(a)\ \ 3z + i\overline{z} = 4 \qquad (b)\ \ \overline{z}^4 = 1 + i$$

[punteggio 6]

(a) L'equazione da risolvere insieme alla equazione complessa coniugata costituiscono un sistema lineare nelle incognite z e $\overline{z}$

$$\begin{cases} 3z + i\overline{z} & = 4 \\ -iz + 3\overline{z} & = 4 \end{cases}$$

Tale sistema ammette l'unica soluzione

$$z = \frac{12 - 4i}{9 + i^2} = \frac{3}{2} - \frac{i}{2}$$

(b) Prendendone il complesso coniugato, l'equazione assegnata diventa

$$z^4 = 1 - i = \sqrt{2}\ e^{-i\pi/4}$$

che ammette le 4 soluzioni distinte

$$z_k = \sqrt[8]{2}\ e^{i(-\pi/4+2\pi k)/4} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

cioé esplicitamente

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[8]{2}\ e^{-i\pi/16} \\ z_1 &= \sqrt[8]{2}\ e^{i7\pi/16} \\ z_2 &= \sqrt[8]{2}\ e^{i15\pi/16} \\ z_3 &= \sqrt[8]{2}\ e^{i23\pi/16} \end{aligned}$$

Esercizio 3 Sia $S = \mathbb{R}$ e si consideri la funzione $d : S \times S \mapsto \mathbb{R}$

$$d(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

Si dimostri che (S, d) è uno spazio metrico e si valuti il suo diametro. Suggerimento: si osservi che $g(t) = t/(1 + t)$ è monotona crescente per $t \in [0, \infty)$.

[punteggio 5]

Occorre verificare che d soddisfa tutte le proprietà di una metrica. Dalle proprietà del modulo segue immediatamente che $\forall x, y \in S$

$$d(x, y) \geq 0$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) = 0 \qquad \text{se e solo se } x = y$$

Per verificare la proprietà triangolare si osservi che la funzione $g(t) = t/(1+t)$ è monotona crescente per $t \in [0, \infty)$, infatti in tale intervallo risulta $g'(t) = 1/(1 + t)^2 > 0$. D'altro canto per la proprietà triangolare del modulo si ha $|x - y| \leq |x - z| + |z - y|$. Pertanto $\forall x, y, z \in S$ risulta

$$\begin{aligned}
d(x, y) &= g(|x - y|) \\
&\leq g(|x - z| + |z - y|) \\
&= \frac{|x - z| + |z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\
&= \frac{|x - z|}{1 + |x - z| + |z - y|} + \frac{|z - y|}{1 + |x - z| + |z - y|} \\
&\leq \frac{|x - z|}{1 + |x - z|} + \frac{|z - y|}{1 + |z - y|} \\
&= d(x, z) + d(z, y)
\end{aligned}$$

Con questa metrica il diametro di $\mathbb{R}$ è finito, infatti

$$\operatorname{diam} S = \sup_{x,y \in S} \frac{|x - y|}{1 + |x - y|} = \lim_{t \to \infty} \frac{t}{1 + t} = 1$$

Esercizio 4 Determinare, se esistono, i seguenti limiti giustificando la risposta

$$(a)\quad \lim_{z\to 1} \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{z-3i}\right) \qquad (b)\quad \lim_{z\to\infty}\left(\sqrt{z+i}-\sqrt{z-i}\right)\sqrt{z} \qquad (c)\quad \lim_{z\to 0}\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^n \qquad n\geq 1$$

[punteggio 6]

(a) Per la continuità delle funzioni razionali e poiché il limite della parte reale è uguale alla parte reale del limite, risulta

$$\lim_{z\to 1} \mathrm{Re}\left(\frac{1+z}{z-3i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1+1}{1-3i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{2(1+3i)}{1+9}\right) = \frac{1}{5}$$

(b) Moltiplicando e dividendo per $\sqrt{z+i}+\sqrt{z-i}$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{z\to\infty}\left(\sqrt{z+i}-\sqrt{z-i}\right)\sqrt{z} &= \lim_{z\to\infty}\frac{2i\sqrt{z}}{\sqrt{z+i}+\sqrt{z-i}}\\ &= \lim_{z\to\infty}\frac{2i}{\sqrt{1+i/z}+\sqrt{1-i/z}}\\ &= i\end{aligned}$$

avendo utilizzato $\lim_{z\to\infty} c/z = \lim_{z\to 0} cz = 0$ e la continuità delle funzioni razionali e di $\sqrt{z}$.

(c) Il limite non esiste. Infatti posto $z(x)=x$ con $x\in\mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{z(x)}{\overline{z(x)}}\right)^n &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x}\right)^n\\ &= 1\end{aligned}$$

Posto invece $z(x)=x+ix$ con $x\in\mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{z(x)}{\overline{z(x)}}\right)^n &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x+ix}{x-ix}\right)^n\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x+ix)^2}{2x^2}\right)^n\\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{i}{x}\right)^n\\ &= \infty\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia (S,d) uno spazio metrico e $A \subset S$. Dimostrare che A è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$.

[punteggio 5]

Si ricordi innanzitutto la definizione di chiusura di A

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{chiuso},\ F \supset A} F$$

Si supponga A chiuso. Per la definizione di $\overline{A}$ si ha evidentemente che $A \subset \overline{A}$. D'altro canto poiché $A \supset A$, A stesso è uno degli insiemi chiusi F la cui intersezione definisce $\overline{A}$ e pertanto $\overline{A} \subset A$. Si deve allora concludere che $A = \overline{A}$.
Si supponga ora $A = \overline{A}$. Poiché l'intersezione di una infinità numerabile di insiemi chiusi è un insieme chiuso, A è chiuso.

Esercizio 6 Determinare il raggio di convergenza R delle seguenti serie di potenze

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{n!} z^{n!} \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{n} z^{n!} \qquad (c)\ \sum_{n=0}^{\infty} e^{n!} z^{n}$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} e^n & \text{per } n = k! \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} = \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m,\ n=k!} \left\{ |e^n|^{1/n}, 0 \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} e = e \end{aligned}$$

In conclusione, $R = 1/e$.

(b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} e^k & \text{per } n = k! \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} = \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m,\ n=k!} \left\{ \left|e^k\right|^{1/n}, 0 \right\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

avendo usato il fatto che la successione $\{e^{k/k!}\}$ è monotonona decrescente per $k \geq 1$ e tende a 1 per $k \to \infty$. In conclusione, $R = 1$.

(c) La serie è già scritta in forma canonica e il suo coefficiente n-esimo è

$$a_n = e^{n!}$$

Poiché

$$|a_n|^{1/n} = e^{n!/n} = e^{(n-1)!} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

si ha $R = 0$.