METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 2 marzo 2006

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare e graficare il luogo dei punti z del piano complesso tali che

$$\cosh z = a \qquad a \in \mathbb{R},\ 0 < a < 1$$

[punteggio 5]

Si ha

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = a$$

ovvero

$$e^{2z} - 2ae^z + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^z = a \pm i\sqrt{1-a^2}$$

Le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} z &= \log\left(a \pm i\sqrt{1-a^2}\right) \\ &= \ln\sqrt{a^2 + (1-a^2)} + i\,(\arccos a + 2\pi k) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

dove $\arccos a$ indica il valore principale compreso tra $-\pi/2$ e $\pi/2$. In conclusione

$$z = i\,(\arccos a + 2\pi k) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

che per $a \in (0,1)$ rappresentano gli intervalli sull'asse immaginario $(-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k)$.
Alternativamente, si ponga $z = x + iy$. L'equazione da risolvere è equivalente al sistema

$$\begin{cases} \cosh x \cos y = a \\ \sinh x \sin y = 0 \end{cases}$$

La soluzione $y = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, della seconda equazione è incompatibile con la prima equazione. La soluzione $x = 0$ della seconda equazione sostituita nella prima equazione fornisce

$$\cos y = a$$

che per $a \in (0,1)$ ha soluzione $y \in (-\pi/2 + 2\pi k, \pi/2 + 2\pi k)$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Esercizio 2   Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni, considerandone il ramo principale se necessario, e il valore delle rispettive derivate in tale dominio. Dire quanti rami distinti possiede ogni funzione.

$$(a) \quad \sin(z^n) \qquad (b) \quad \sin(z^{n/m}) \qquad (c) \quad \sin(z^c) \qquad n, m \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

[punteggio 6]

(a) La funzione $\sin(z^n)$ è intera essendo composizione di funzioni intere. In ogni punto $z \in \mathbb{C}$ la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(z^n) = \cos(z^n) n z^{n-1}$$

(b) Se n è multiplo di m si ricade nel caso (a). Altrimenti la funzione $\sin(z^{n/m}) = \sin(\exp((n/m) \log z))$ è polidroma con m rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(z^{n/m}) = \cos(z^{n/m})(n/m) z^{n/m-1}$$

(c) La funzione $\sin(z^c) = \sin(\exp(c \log z))$ è polidroma con infiniti rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(z^c) = \cos(z^c) c z^{c-1}$$

<u>Esercizio 3</u> Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz$$

dove C è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario.

[punteggio 5]

Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = 2\sin(z^{1/2})$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz}2\sin(z^{1/2}) = \cos(z^{1/2})z^{-1/2}$$

Posto $C_\varepsilon = \{z(\varphi) = Re^{i\varphi},\ -(\pi-\varepsilon) \le \varphi \le \pi - \varepsilon\}$, per $z \in C_\varepsilon$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $\cos\sqrt{z}/\sqrt{z}$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{\cos\sqrt{z}}{\sqrt{z}}dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[2\sin(z^{1/2})\right]_{z=Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sin(R^{1/2}e^{i(\pi-\varepsilon)/2}) - 2\sin(R^{1/2}e^{-i(\pi-\varepsilon)/2})\right) \\
&= 2\sin(i\sqrt{R}) - 2\sin(-i\sqrt{R}) \\
&= 4\sin(i\sqrt{R}) \\
&= 4i\sinh\sqrt{R}
\end{aligned}$$

Esercizio 4

Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z| < 2$ e $2 < |z| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{3+z}{z^3 + 2z^2}$$

[punteggio 6]

Per $0 < |z| < 2$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{3+z}{2z^2} \frac{1}{1+\frac{z}{2}}$$

Posto $w = z/2$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \qquad |w| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{3+z}{z^3+2z^2} &= \left(\frac{3}{2z^2} + \frac{1}{2z}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{2^{n+1}} z^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{2^{n+1}} z^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^n} z^{n-2} \\
&= \frac{3}{2z^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n-2} \\
&= \frac{3}{2z^2} - \frac{1}{4z} + \frac{1}{8} - \frac{z}{16} + \frac{z^2}{32} + \ldots
\end{aligned}$$

Per $2 < |z| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{3+z}{z^3} \frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

Posto ora $w = 2/z$ nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{3+z}{z^3+2z^2} &= \left(\frac{3}{z^3} + \frac{1}{z^2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n 2^n z^{-n-3} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n-2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} 3(-1)^n 2^n z^{-n-3} + \sum_{n=-1}^{\infty} (-1)^{n+1} 2^{n+1} z^{-n-3} \\
&= \frac{1}{z^2} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n-3} \\
&= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{4}{z^5} - \frac{8}{z^6} + \frac{16}{z^7} - \frac{32}{z^8} + \ldots
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sia $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ con $z, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Dimostrare che esiste almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$ (teorema fondamentale dell'algebra).

[punteggio 5]

Si supponga, per assurdo, che $P_n(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Allora la funzione $f(z) = 1/P_n(z)$ è intera. Tale funzione è anche limitata. Infatti $|f(z)|$ è continua e dunque limitata nel compatto $|z| \leq R$ con R arbitrario. E' possibile mostrare che $|f(z)|$ è limitata anche in $|z| > R$ se R è opportunamente grande. A tale scopo si ponga

$$g(z) = \frac{a_0}{z^n} + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_2}{z^{n-2}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{z}$$

così che $P_n(z) = z^n(g(z) + a_n)$. Posto

$$R > \max_{k=0,1,\ldots,n-1} \left(2n \frac{|a_k|}{|a_n|} \right)^{1/(n-k)}$$

per $|z| > R$ si ha

$$\left| \frac{a_k}{z^{n-k}} \right| < \frac{|a_n|}{2n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

e quindi

$$|g(z) + a_n| \geq ||a_n| - |g(z)|| > |a_n| - n\,\frac{|a_n|}{2n} = \frac{|a_n|}{2}$$

Si conclude che per $|z| > R$

$$|f(z)| = \frac{1}{|P_n(z)|} = \frac{1}{|z|^n\,|g(z) + a_n|} < \frac{2}{|a_n|\,R^n}$$

Essendo $f(z)$ analitica e limitata in $\mathbb{C}$, per il teorema di Liouville si giunge all'assurdo che essa è costante in $\mathbb{C}$. Pertanto deve esistere un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$.

Esercizio 6 Ciascuna delle seguenti funzioni, si consideri il ramo principale per quelle polidrome, ha una singolarità in $z = 0$. Classificare la natura della singolarità e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo.

$$(a)\ \frac{3+z}{z^3+2z^2} \qquad (b)\ z\log z \qquad (c)\ \frac{1}{\log(1+z)}$$

[punteggio 6]

(a) La funzione può essere riscritta come

$$\frac{3+z}{z^3+2z^2} = \frac{\phi(z)}{z^2} \qquad \phi(z) = \frac{3+z}{2+z}$$

con $\phi(z)$ analitica e non nulla in $z = 0$. Pertanto la funzione considerata ha in $z = 0$ un polo doppio e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{3+z}{z^3+2z^2} = \frac{\phi'(0)}{1!} = -\frac{1}{4}$$

(b) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$z\log z$$

ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

(c) Utilizzando lo sviluppo notevole

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^n \qquad |z| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\log(1+z)} &= \frac{1}{z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \ldots} \\
&= \frac{1}{z} \frac{1}{1 + \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right)} \\
&= \frac{1}{z}\left[1 - \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right) + \left(-\frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} + \ldots\right)^2 - \ldots\right] \\
&= \frac{1}{z} + \frac{1}{2} - \frac{z}{12} + \frac{z^2}{24} - \ldots
\end{aligned}$$

Pertanto la funzione considerata ha in $z = 0$ un polo semplice e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{\log(1+z)} = 1$$