METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 4 marzo 2005

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare tutte le soluzioni della seguente equazione e graficarle nel piano complesso

$$\sinh z = -i\pi$$

[punteggio 5]

Si ha

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\pi$$

ovvero

$$e^{2z} + 2i\pi e^z - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^z = -i\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1}\right)$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione $\sinh z = -i\pi$ sono

$$\begin{aligned} z &= \log\left[-i\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-1}\right)\right] \\ &= \ln\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-1}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Esercizio 2 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{\cos(\log z)}{z} dz$$

dove C è il cammino, percorso in verso antiorario, costituito dal triangolo di vertici b e $-a \pm ib$, con a e b reali positivi. Suggerimento: si consideri che la derivata di $\sin(\log z)$ è ...

[punteggio 6]

Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $\sin(\log z)$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin(\log z) = \frac{\cos(\log z)}{z}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\cos(\log z)}{z} dz &= \lim_{\varepsilon \to 0} [\sin(\log z)]_{z=-a-i\varepsilon}^{z=-a+i\varepsilon} \\
&= \sin(\ln a + i\pi) - \sin(\ln a - i\pi) \\
&= \sin(\ln a)\cos(i\pi) - \cos(\ln a)\sin(i\pi) \\
&\quad - [\sin(\ln a)\cos(i\pi) - \cos(\ln a)\sin(i\pi)] \\
&= 2i\cos(\ln a)\sinh(\pi)
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Assumendo per $\log z$ il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{\log(z+2\pi)}{(z-i\pi)^3}dz$$

dove C è la circonferenza $|z|=4$ percorsa in verso antiorario.

[punteggio 5]

Il ramo principale di $\log(z+2\pi)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti

$$z=-2\pi-t \qquad t\geq 0$$

Pertanto, $\log(z+2\pi)$ è analitica sulla circonferenza C e al suo interno. Poiché $i\pi$ è un punto interno a C, per la rappresentazione integrale di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{\log(z+2\pi)}{(z-i\pi)^3}dz &= \frac{2\pi i}{2!}\,\frac{d^2}{dz^2}\log(z+2\pi)\bigg|_{z=i\pi} \\
&= \pi i\,\frac{-1}{(z+2\pi)^2}\bigg|_{z=i\pi} \\
&= -\frac{4+3i}{25\pi}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Ciascuna delle seguenti funzioni ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo.

$$(a) \quad \log\left(z^2\right) \qquad (b) \quad z^3 \cos\left(\frac{1}{z^2}\right) \qquad (c) \quad \frac{1}{z^4 \sinh z}$$

[punteggio 6]

(a) Scelto il generico ramo del logaritmo

$$\log z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z \qquad \varphi < \operatorname{Arg} z \leq \varphi + 2\pi$$

la funzione $\log(z^2)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti del tipo $z = \pm\sqrt{t}e^{i\varphi/2}$ con $t \geq 0$. Pertanto, tale funzione ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione) e non esiste una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

(b) Ricordando che

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} w^{2n} \qquad |w| < \infty$$

posto $w = z^{-2}$ per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z^3 \cos\left(z^{-2}\right) &= z^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{-4n} \\ &= z^3 \left(1 - \frac{z^{-4}}{2!} + \frac{z^{-8}}{4!} - \frac{z^{-12}}{6!} + \dots\right) \\ &= z^3 - \frac{1}{2!}\frac{1}{z} + \frac{1}{4!}\frac{1}{z^5} - \frac{1}{6!}\frac{1}{z^9} + \dots \end{aligned}$$

Pertanto la funzione $z^3 \cos(z^{-2})$ ha in $z = 0$ una singolarità essenziale e

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^3 \cos\left(z^{-2}\right) = -\frac{1}{2}$$

(c) In questo caso per $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^4 \sinh z} &= \frac{1}{z^4} \frac{1}{z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots} \\ &= \frac{1}{z^5} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right)} \\ &= \frac{1}{z^5} \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right)^2 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \frac{z^6}{7!} + \dots\right.\right. \\ &= \frac{1}{z^5} \left[1 - \frac{1}{3!}z^2 + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z^4 + \left(-\frac{1}{7!} + \frac{2}{3!5!} - \frac{1}{(3!)^3}\right) z^6 + \dots\right] \\ &= \frac{1}{z^5} - \frac{1}{6}\frac{1}{z^3} + \frac{7}{360}\frac{1}{z} - \frac{31}{15120} z + \dots \end{aligned}$$

Pertanto, $z = 0$ è un polo di ordine 5 di $1/(z^4 \sinh z)$ e si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^4 \sinh z} = \frac{7}{360}$$

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z| < 2$ e $2 < |z| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z^2}$$

[punteggio 6]

Per $0 < |z| < 2$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{1}{2z^2} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}}$$

Posto $w = z/2$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \qquad |w| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3 + 2z^2} &= \frac{1}{2z^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z}{2}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} z^{n-2} \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{z^2} - \frac{1}{2^2}\frac{1}{z} + \frac{1}{2^3} - \frac{1}{2^4} z + \frac{1}{2^5} z^2 + \ldots
\end{aligned}$$

Per $2 < |z| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \frac{2}{z}}$$

Posto ora $w = 2/z$ nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^3 + 2z^2} &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z}\right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-n-3} \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^4} + \frac{2^2}{z^5} - \frac{2^3}{z^6} + \frac{2^4}{z^7} - \frac{2^5}{z^8} + \ldots
\end{aligned}$$

Esercizio 5   Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z| < \sqrt{2}$ e $\sqrt{2} < |z| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^3 + 2z}$$

[punteggio 6]

Per $0 < |z| < \sqrt{2}$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{1}{2z} \frac{1}{1 + \frac{z^2}{2}}$$

Posto $w = z^2/2$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \qquad |w| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3 + 2z} &= \frac{1}{2z} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z^2}{2} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2)^{n+1}} z^{2n-1} \\ &= \frac{1}{2z} - \frac{z}{4} + \frac{z^3}{8} - \frac{z^5}{16} + \frac{z^7}{32} + \ldots \end{aligned}$$

Per $\sqrt{2} < |z| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \frac{2}{z^2}}$$

Posto ora $w = 2/z^2$ nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z^3 + 2z} &= \frac{1}{z^3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2}{z^2} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n z^{-2n-3} \\ &= \frac{1}{z^3} - \frac{2}{z^5} + \frac{4}{z^7} - \frac{8}{z^9} + \frac{16}{z^{11}} - \frac{32}{z^{13}} + \ldots \end{aligned}$$

Esercizio 6 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\, dx$$

[punteggio 5]

La funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+16)^2}$$

ha poli doppi in $z = \pm 4i$. Detto $C = L_R \cup C_R$ il cammino di integrazione chiuso definito da

$$\begin{aligned} L_R &= \{z(x) = x, \ -R \le x \le R\} \\ C_R &= \{z(\theta) = Re^{i\theta}, \ 0 \le \theta \le \pi\} \end{aligned}$$

con $R > 4$, poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo doppio in $z = 4i$, si ha

$$\int_C f(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=4i} f(z) = 2\pi i \left.\frac{\phi'(z)}{1!}\right|_{z=4i} = 2\pi i \, \frac{1}{16i} = \frac{\pi}{8}$$

dove si è posto $\phi(z) = z^2/(z+4i)^2$. Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\, dx$$

$$\left| \int_{C_R} f(z)\, dz \right| \le \pi R \, \frac{R^2}{(R^2-16)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

e quindi nel limite $R \to \infty$ si ottiene

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$$

In conclusione

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+16)^2}\, dx = \frac{\pi}{16}$$