METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova finale 4 aprile 2003

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinire (segnare)	1	2	3	4

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos z = a \qquad a \in \mathbb{R} \qquad a > 1$$

[punteggio 4]

Posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{1}{2}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left((\cos x + i\sin x)e^{-y} + (\cos x - i\sin x)e^{y}\right)\\ &= \cos x\cosh y - i\sin x\sinh y\end{aligned}$$

Occorre dunque risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases}\cos x\cosh y = a\\ \sin x\sinh y = 0\end{cases}$$

La soluzione $y = 0$ della seconda equazione è incompatibile con la prima equazione. La soluzione $x = \pi k$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ della seconda equazione sostituita nella prima da

$$(-1)^k \cosh y = a$$

Questa ha soluzione solo per k pari e con y che soddisfa $\cosh y = a$, ovvero

$$e^{2y} - 2ae^{y} + 1 = 0$$

la cui soluzione è

$$e^{y} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned}z_k &= 2\pi k + i\ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right)\\ &= 2\pi k \pm i\ln\left(a + \sqrt{a^2-1}\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\end{aligned}$$

Esercizio 2 Determinare il valore principale di

$$(4-4i)^{1+i}$$

[punteggio 4]

$$\begin{aligned}
(4-4i)^{1+i} &= \exp\left[(1+i)\mathrm{Log}(4-4i)\right] \\
&= \exp\left[(1+i)\left(\ln|4-4i| + i\mathrm{Arg}(4-4i)\right)\right] \\
&= \exp\left[(1+i)\left(\ln\sqrt{32} - i\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \exp\left[\left(\ln\sqrt{32} + \frac{\pi}{4}\right) + i\left(\ln\sqrt{32} - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \sqrt{32}\, e^{\frac{\pi}{4}}\left[\cos\left(\ln\sqrt{32} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\ln\sqrt{32} - \frac{\pi}{4}\right)\right]
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a) \sum_{n=0}^{\infty} n^3 4^n z^n \qquad (b) \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in) z^n$$

[punteggio 4]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^3 4^n$ e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^3 4^n}{(n+1)^3 4^{n+1}} = \frac{1}{4(1+1/n)^3} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/4$.

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \cos(in) = \frac{e^{-n} + e^n}{2}$$

e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{e^{-n} + e^n}{e^{-(n+1)} + e^{n+1}} = \frac{e^{-2n} + 1}{e^{-2n-1} + e} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/e$.

<u>Esercizio 4</u> Assumendo per il logaritmo la diramazione principale, determinare la regione di analiticità della funzione

$$\log \frac{1+z}{1-z}$$

e quindi svilupparla in serie di Taylor intorno a $z = 0$.

[punteggio 5]

La diramazione principale di $\log z$ è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$\frac{1+z}{1-z} = -c \qquad c \geq 0$$

cioé $z(c) = (c+1)/(c-1)$, ovvero lungo i semiassi reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Per determinare lo sviluppo di Taylor intorno a $z = 0$ (tale sviluppo esiste all'interno del cerchio centrato nell'origine e di raggio 1) si osservi che la funzione $\log(1+z) - \log(1-z)$, intendendo per entrambi i log la diramazione principale, è analitica ovunque ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$\begin{aligned} 1+z &= -a \qquad a \geq 0 \\ 1-z &= -b \qquad b \geq 0 \end{aligned}$$

ovvero lungo i semiassi reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$. Poiché in $z = 0$ entrambe le funzioni $\log[(1+z)/(1-z)]$ e $\log(1+z) - \log(1-z)$ valgono 0, esse coincidono all'interno della comune regione di analiticità. Posto $f(z) = \log(1 + z)$, per $|z| < 1$ si ha

$$\begin{aligned} f^{(1)}(z) &= (1+z)^{-1} \\ f^{(2)}(z) &= -(1+z)^{-2} \\ f^{(3)}(z) &= 2(1+z)^{-3} \\ f^{(4)}(z) &= -6(1+z)^{-4} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^{n+1}(n-1)!(1+z)^{-n} \end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned} \log \frac{1+z}{1-z} &= \log(1+z) - \log(1-z) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (-z)^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (-z)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2n+1} z^{2n+1} \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza di questa serie è $R = 1$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z = 0$ fino all'ordine z^1 compreso la funzione

$$\frac{1}{z^2 \sinh z}$$

[punteggio 4]

Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 \sinh z} &= \frac{1}{z^2 \left(z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3} \frac{1}{1 + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3} \left[1 - \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{z^3} \left[1 - \frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \left(\frac{z^2}{3!}\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{1}{z^3} - \frac{1}{6z} + \frac{7z}{360} + \dots
\end{aligned}$$

La funzione ha un polo di ordine 3 in $z = 0$ con residuo $-1/6$.

Esercizio 6 Supponendo $f(z)$ continua per $\mathrm{Re} z \geq 0$ e $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$, dimostrare che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} e^{az} f(z)\, dz = 0 \qquad a \in \mathbb{R} \qquad a < 0$$

dove $\gamma_R(\theta) = Re^{i\theta}$ con $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$.

[punteggio 5]

La continuità di $e^{az} f(z)$ per $\mathrm{Re}\, z \geq 0$ assicura l'esistenza dell'integrale di tale funzione su γ_R. Dimostriamo che $\forall\varepsilon > 0$ esiste un $R_0(\varepsilon) > 0$ tale che $\left|\int_{\gamma_R} e^{az} f(z) dz\right| < \varepsilon$ per ogni $R > R_0$. Per ipotesi, $\forall\varepsilon > 0$ esiste un $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che $|f(z)| < \varepsilon$ quando $|1/z| < \delta$. Allora per $R > \delta^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} e^{az} f(z) dz\right| &\leq \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left|e^{a\gamma_R(\theta)} f(\gamma_R(\theta))\gamma_R'(\theta)\right| d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{aR\cos\theta} \left|f(\gamma_R(\theta))\right| R d\theta \\
&< 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{aR\cos\theta}\, d\theta \\
&= 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{aR\sin\varphi} d\varphi \qquad \left(\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\
&\leq 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-|a|R2\varphi/\pi} d\varphi \\
&= 2\varepsilon R \frac{\pi}{2\,|a|\,R}\left(1 - e^{-|a|R}\right) \\
&< \frac{\pi\varepsilon}{|a|},
\end{aligned}$$

avendo usato il fatto che per $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ si ha $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$ e quindi $\exp(aR\sin\varphi) = \exp(-|a|\,R\sin\varphi) \leq \exp(-|a|\,R2\varphi/\pi)$. L'asserto segue scegliendo $R_0 = 1/\delta(\varepsilon|a|/2)$.

<u>Esercizio 7</u> Supponendo che $f(z) = 1/q(z)^2$ con $q(z)$ analitica in z_0 e con $q(z_0) = 0$ e $q'(z_0) \neq 0$, dimostrare che

$$\mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=z_0} = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}$$

[punteggio 5]

Per ipotesi in un intorno $|z - z_0| < \varepsilon$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} q(z) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \\ &= (z - z_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n+1)}(z_0)}{(n+1)!}(z - z_0)^n \\ &= (z - z_0) g(z) \end{aligned}$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in z_0, infatti derivando si ha

$$q'(z) = g(z) + (z - z_0)g'(z) \qquad \Rightarrow \qquad g(z_0) = q'(z_0)$$

Derivando ancora si ottiene

$$q''(z) = 2g'(z) + (z - z_0)g''(z) \qquad \Rightarrow \qquad 2g'(z_0) = q''(z_0)$$

Pertanto

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^2} \qquad \phi(z) = g(z)^{-2} \qquad \phi(z_0) \neq 0$$

cioé $f(z)$ ha un polo di ordine 2 in z_0 con

$$\mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=z_0} = \phi'(z_0) = -\frac{2g'(z_0)}{g(z_0)^3} = -\frac{q''(z_0)}{q'(z_0)^3}$$

Esercizio 8 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\, dx$$

[punteggio 4]

La funzione

$$f(z) = \frac{z}{(z^2+4z+13)^2} = \frac{z}{(z-z_+)^2(z-z_-)^2}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei due poli doppi in $z_\pm = -2 \pm 3i$. L'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso $C = L_R \cup C_R$ dove $L_R \equiv \{z(x) = x,\ -R \leq x \leq R\}$ e $C_R \equiv \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq \pi\}$ vale quindi

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\, dz &= \int_{-R}^{R} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz \\
&= 2\pi i \,\text{Res}\,[f(z)]_{z=z_+} \\
&= 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\frac{z}{(z-z_-)^2}\right|_{z=z_+} \\
&= 2\pi i\, \frac{-z_+ - z_-}{(z_+ - z_-)^3} \\
&= -\frac{\pi}{27}
\end{aligned}$$

Poiché per $z \in C_R$ e R grande

$$|f(z)| \leq \frac{R}{(R^2-4R-13)^2}$$

e quindi

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, dz\right| \leq \frac{\pi R^2}{(R^2-4R-13)^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

prendendo il limite $R \to \infty$ dell'integrale su C si ottiene

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2+4x+13)^2}\, dx = -\frac{\pi}{27}$$