METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 6 febbraio 2007

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e disegnarle nel piano complesso

$$(a) \quad z^2 + iz + 2 = 0 \qquad (b) \quad \overline{z}^4 + \overline{z^2} + 1 = 0$$

[punteggio 6]

(a) L'equazione ha due soluzioni distinte

$$z = \frac{-i + \sqrt{-1-8}}{2} = \frac{-i \pm 3i}{2} = -2i, \ i$$

(b) Posto $w = \overline{z}^2$, l'equazione da risolvere è equivalente a

$$w^2 + w + 1 = 0$$

che ha soluzioni

$$w_{\pm} = \frac{-1 + \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Si prendano poi le due radici distinte dell'equazione $z = \overline{\sqrt{w_{\pm}}}$

$$z_{k\pm} = \overline{\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{1/2}} = \overline{\left(e^{\pm i2\pi/3}\right)^{1/2}} = \overline{e^{(\pm i2\pi/3 + i2\pi k)/2}} = e^{\mp i\pi/3 - i\pi k} \qquad k = 0, 1$$

In conclusione, l'equazione assegnata ha quattro soluzioni distinte

$$\begin{aligned} z_{0\pm} &= e^{\mp i\pi/3} = \frac{1}{2} \mp i\frac{\sqrt{3}}{2} \\ z_{1\pm} &= e^{\mp i\pi/3 - i\pi} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Esercizio 2 Calcolare il valore di

$$\cos(4\arctan(3))$$

[punteggio 5]

Posto $\theta = \arctan(3)$ dalla formula di de Moivre si ha

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$$

e quindi

$$\cos(4\theta) = \mathrm{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)^4\right) = \cos^4\theta - 6\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta$$

Usando $\cos^2\theta = 1 - \tan^2\theta\cos^2\theta$, per $\tan\theta = 3$ si ha

$$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{10} \qquad \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = \frac{9}{10}$$

e quindi

$$\cos(4\arctan(3)) = \frac{1}{100} - 6\frac{1}{10}\frac{9}{10} + \frac{81}{100} = \frac{7}{25}$$

Esercizio 3 Si consideri la funzione $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mapsto \mathbb{R}$

$$d(z_1, z_2) = \max\left(|\mathrm{Re}(z_1 - z_2)|, |\mathrm{Im}(z_1 - z_2)|\right)$$

Si dimostri che $(\mathbb{C}, d)$ è uno spazio metrico e si disegni, motivando, la boccia chiusa $\overline{B}(0,1)$.

[punteggio 5]

Occorre verificare che d soddisfa tutte le proprietà di una metrica. Dalla definizione segue immediatamente che $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$

$$d(z_1, z_2) \geq 0$$

$$d(z_1, z_2) = d(z_2, z_1)$$

$$d(z_1, z_2) = 0 \qquad \text{se e solo se } z_1 = z_2$$

Per verificare la proprietà triangolare si osservi che $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ e posto $z_k = x_x + iy_k$, $k = 1, 2, 3$, risulta

$$\begin{aligned} d(z_1, z_2) &= \max\left(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|\right) \\ &\leq \max\left(|x_1 - x_3| + |x_3 - x_2|, |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2|\right) \\ &\leq \max\left(|x_1 - x_3| + |y_1 - x_3|\right) + \max\left(|x_3 - x_2| + |y_3 - y_2|\right) \\ &= d(z_1, z_3) + d(z_2, z_3) \end{aligned}$$

La boccia considerata è l'insieme

$$\begin{aligned} \overline{B}(0,1) &= \{z \in \mathbb{C} : \ d(z, 0) \leq 1\} \\ &= \{x + iy \in \mathbb{C} : \ |y| \leq |x| \leq 1\} \cup \{x + iy \in \mathbb{C} : \ |x| \leq |y| \leq 1\} \end{aligned}$$

Il primo di questi due insiemi è la regione di piano xy delimitata dalle rette $x = \pm 1$ e $y = \pm x$ ovvero i triangoli di vertici $(0,0), (1,-1), (1,1)$ e $(0,0), (-1,1), (-1,-1)$. Il secondo è la regione di piano xy delimitata dalle rette $y = \pm 1$ e $y = \pm x$ ovvero i triangoli di vertici $(0,0), (1,1), (-1,1)$ e $(0,0), (-1,-1), (1,-1)$. In conclusione $\overline{B}(0,1)$ è il sottoinsieme di $\mathbb{C}$ rappresentato dal quadrato di vertici $1+i, -1+i, -1-i, 1-i$ bordo compreso.

Esercizio 4 Si consideri la successione di funzioni $f_n(z) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ con $f_n(z) = z^n$ e $n \in \mathbb{N}$. Mostrare che per $z \in \overline{B}(0,r)$ con $0 < r < 1$ tale successione converge uniformemente a $f(z) = 0$. Mostrare inoltre che la convergenza non è uniforme in $B(0,1)$.

[punteggio 6]

Per ogni $z \in \overline{B}(0,r)$ si ha

$$|f_n(z) - f(z)| = |z^n - 0| = |z|^n \leq r^n$$

Poiché $0 < r < 1$, $\forall \varepsilon > 0$ è possibile trovare un intero $N(\varepsilon)$, ad esempio

$$N(\varepsilon) = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln r} \right\rceil,$$

tale che $\forall n > N(\varepsilon)$ si abbia $r^n < \varepsilon$ e quindi $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \ \forall z \in \overline{B}(0,r)$, che è la definizione di uniforme convergenza di (f_n) a f in $\overline{B}(0,r)$.
D'altro canto (f_n) non converge uniformemente a f in $B(0,1)$ poiché scelto $0 < \varepsilon < 1$ per ogni intero n è possibile trovare $z \in B(0,1)$, basta prendere $\varepsilon^{1/n} < |z| < 1$, tale che $|f_n(z) - f(z)| > \varepsilon$.

NB: non è uniforme, in generale, la convergenza di una successione di funzioni $(f_n(x))$ a $f(x)$ per $x \in D$ con D compatto. Si consideri $f_n(x) : [0,1] \mapsto [0,1]$ definita dall'unione dei segmenti che congiungono i punti $(0,0)$, $(1/2n, 1)$, $(1/n, 0)$ e $(1,0)$. Tale successione converge, puntualmente ma non uniformemente, a $f(x) = 0$.

<u>Esercizio 5</u> Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ con $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso e $f'(z) = 0$ $\forall z \in D$. Dimostrare che $f(z)$ è costante in D.

[punteggio 5]

Poiché $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$, è derivabile in D, in D esistono le derivate prime parziali delle funzioni componenti u e v. Inoltre valendo le condizioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$, ed essendo $f' = u_x + iv_x = 0$, si ha $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$ in tutto D. Siano z e w due qualsiasi punti di D. Poiché $D \subset \mathbb{C}$ è aperto e connesso, tali punti possono essere congiunti da una poligonale finita di vertici $z_1, z_2, \ldots, z_n$ con $z_1 = z$ e $z_n = w$. Si consideri innanzitutto il segmento z_1z_2. Un qualsiasi punto di tale segmento ha parti reale e immaginaria parametrizzabili come

$$x(t) = x_1 + t(x_2 - x_1), \quad y(t) = y_1 + t(y_2 - y_1), \qquad t \in [0, 1]$$

dove $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$. La derivata totale di u in funzione del parametro t vale

$$\frac{du}{dt} = u_x(x(t), y(t))\frac{dx(t)}{dt} + u_y(x(t), y(t))\frac{dy(t)}{dt} = 0 \qquad \forall t \in [0, 1]$$

pertanto

$$u(x_2, y_2) = u(x_1, y_1) + \int_0^1 \frac{du}{dt}dt = u(x_1, y_1).$$

Passando a considerare i successivi segmenti $z_{k-1}z_k$, $k = 3, \ldots, n$, si ha $u(x_k, y_k) = u(x_{k-1}, y_{k-1})$ e quindi $u(x_1, y_1) = u(x_n, y_n)$. Analogamente $v(x_1, y_1) = v(x_n, y_n)$ e quindi $f(z) = f(w)$. Dalla arbitrarietà di z e w segue l'asserto.

<u>Esercizio 6</u> Sapendo che la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ha raggio di convergenza R_0, determinare il raggio di convergenza R delle seguenti serie

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n^3 z^n \qquad (b)\quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{3n}$$

[punteggio 6]

(a) Per ipotesi sappiamo che $\limsup_{n\to\infty} |c_n|^{1/n} = 1/R_0$, pertanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \limsup_{n\to\infty} \left|c_n^3\right|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ \left(|c_k|^{1/k} \right)^3 \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} \left\{ |c_k|^{1/k} \right\} \right)^3 = \left(\lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |c_k|^{1/k} \right\} \right)^3 = \left(\frac{1}{R_0} \right)^3
\end{aligned}$$

In conclusione, $R = R_0^3$.

(b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} c_k & \text{per } n = 3k \text{ con } k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{ |a_n|^{1/n} \right\} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sup_{3k\geq m} \left\{ |c_k|^{1/(3k)} \right\} = \lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} \left\{ \left(|c_k|^{1/k} \right)^{1/3} \right\} \\
&= \left(\lim_{j\to\infty} \sup_{k\geq j} \left\{ |c_k|^{1/k} \right\} \right)^{1/3} = \left(\frac{1}{R_0} \right)^{1/3}
\end{aligned}$$

In conclusione, $R = R_0^{1/3}$. Alternativamente si ponga $w = z^3$. La serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ ha raggio di convergenza R_0 in w e $R = R_0^{1/3}$ in $z = w^{1/3}$.