METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 6 marzo 2007

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{cotan}(\sqrt{z}) = 0$$

[punteggio 5]

Poiché $\mathrm{cotan}(z) = \cos(z)/\sin(z)$, l'equazione proposta è equivalente a

$$\cos(\sqrt{z}) = 0$$

Posto $w = \sqrt{z}$, si ha

$$\frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0$$

ovvero

$$\left(e^{iw}\right)^2 = -1$$

che fornisce

$$iw = \log(\pm i) = \log\left(1e^{\pm i\pi/2}\right) = \ln 1 + i(\pm\pi/2 + 2k\pi) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In conclusione, si ha

$$\sqrt{z} = (2n+1)\pi/2 \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

e quindi le radici cercate sono

$$z = ((2n+1)\pi/2)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Esercizio 2 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale delle seguenti funzioni

$$(a) \quad \sqrt{z^2-1} \qquad (b) \quad i\sqrt{1-z^2}$$

[punteggio 6]

(a) Il ramo principale di $\sqrt{z^2-1} = \exp[\frac{1}{2}\log(z^2-1)]$ è una funzione analitica ovunque in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti z tali che $z^2 - 1 = -u$ con $u \in [0, \infty)$. In funzione del parametro u tali punti sono dati da

$$\begin{aligned} z(u) &= \pm\sqrt{1-u} \qquad u \in [0,1) \\ z(u) &= \pm i\sqrt{u-1} \qquad u \in [1,\infty) \end{aligned}$$

e rappresentano il segmento reale $[-1, 1]$ e l'intero asse immaginario.

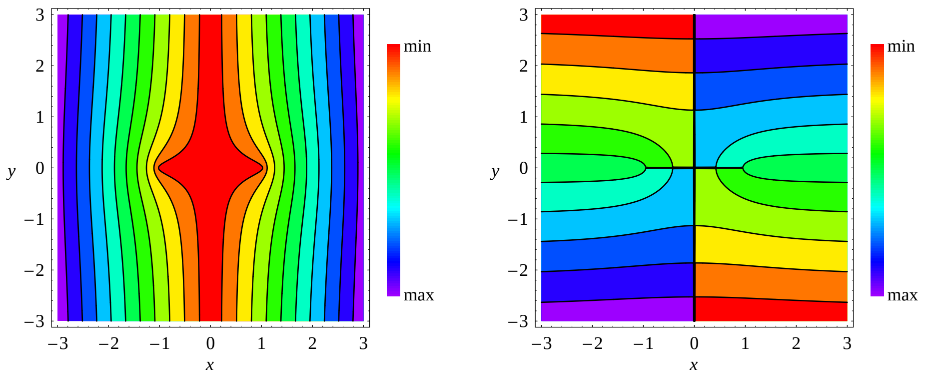

Figure 1: Grafici di livello della parte reale (sinistra) e della parte immaginaria (destra) di $\sqrt{z^2-1}$ con $z = x + iy$.

(b) Il ramo principale di $i\sqrt{1-z^2} = i\exp[\frac{1}{2}\log(1-z^2)]$ è una funzione analitica ovunque in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0, \infty)$. In funzione del parametro u tali punti sono dati da

$$z(u) = \pm\sqrt{1+u} \qquad u \in [0,\infty)$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty, -1]$ e $[1, +\infty)$.

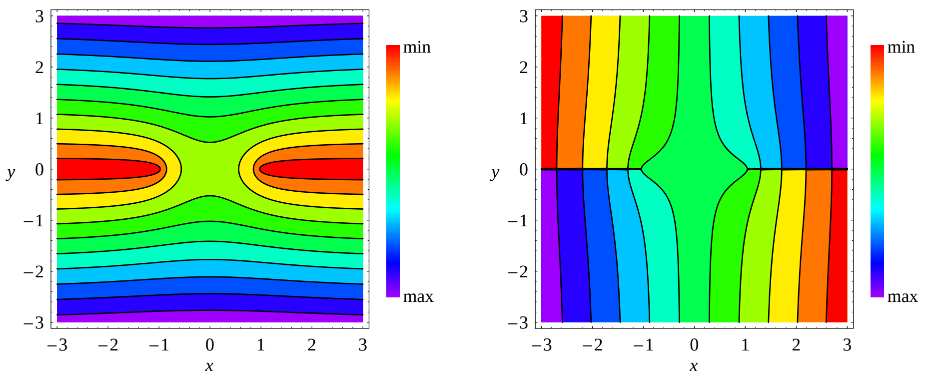

Figure 2: Grafici di livello della parte reale (sinistra) e della parte immaginaria (destra) di $i\sqrt{1-z^2}$ con $z = x + iy$.

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{1}{2\sqrt{z}\cos^2(\sqrt{z})}dz$$

dove C è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario con $R \neq ((2n+1)\pi/2)^2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

[punteggio 5]

Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = \tan(z^{1/2})$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ ad eccezione delle singolarità isolate nei punti $z = ((2n+1)\pi/2)^2 \notin C$. Nel dominio di analiticità, la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz}\tan(z^{1/2}) = \frac{1}{2z^{1/2}\cos^2(z^{1/2})}$$

Posto $C_\varepsilon = \{z(\varphi) = Re^{i\varphi}, \ -(\pi-\varepsilon) \leq \varphi \leq \pi - \varepsilon\}$, per $z \in C_\varepsilon$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $1/(2\sqrt{z}\cos^2(\sqrt{z}))$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{1}{2\sqrt{z}\cos^2(\sqrt{z})}dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon} \frac{1}{2\sqrt{z}\cos^2(\sqrt{z})}dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\tan(z^{1/2})\Big]_{z=Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\Big(\tan(R^{1/2}e^{i(\pi-\varepsilon)/2}) - \tan(R^{1/2}e^{-i(\pi-\varepsilon)/2})\Big) \\
&= \tan(i\sqrt{R}) - \tan(-i\sqrt{R}) \\
&= 2\tan(i\sqrt{R}) \\
&= 2i\tanh(\sqrt{R})
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare i primi tre termini non nulli dello sviluppo in serie di $\tan z$ nei due casi (a) intorno a $z_0 = 0$ e (b) intorno a $z_0 = \pi/2$.

[punteggio 6]

(a) Ricordando gli sviluppi in serie di Maclaurin

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \qquad \cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}$$

validi $\forall z \in \mathbb{C}$, per $|z| < \pi/2$ si ha $\cos z \neq 0$ e quindi in tale regione $\tan z$ è analitica e sviluppabile in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots}{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots} \\
&= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) \frac{1}{1 + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right)} \\
&= \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right) \left[1 - \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right) + \left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots\right)^2 \dots\right] \\
&= z + \left(-\frac{1}{3!} + \frac{1}{2!}\right) z^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{4!} - \frac{1}{3!2!} + \left(\frac{1}{2!}\right)^2\right) z^5 + \dots \\
&= z + \frac{1}{3} z^3 + \frac{2}{15} z^5 + \dots
\end{aligned}$$

(b) La funzione $\tan z$ è analitica nella regione anulare $0 < |z - \pi/2| < \pi$ con centro in $z_0 = \pi/2$ e in tale regione è sviluppabile in serie di Laurent. Posto $z = w + \pi/2$ si ha

$$\begin{aligned}
\sin z &= \sin(w + \pi/2) = \cos w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} w^{2k} \\
\cos z &= \cos(w + \pi/2) = -\sin w = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!} w^{2k+1}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\tan z &= \frac{1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \dots}{-w + \frac{w^3}{3!} - \frac{w^5}{5!} + \frac{w^7}{7!} + \dots} \\
&= -\frac{1}{w} \left(1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} - \frac{w^6}{6!} + \dots\right) \frac{1}{1 + \left(-\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} - \frac{w^6}{7!} + \dots\right)} \\
&= \left(-\frac{1}{w} + \frac{w}{2!} - \frac{w^3}{4!} + \frac{w^5}{6!} \dots\right) \left[1 - \left(-\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots\right) + \left(-\frac{w^2}{3!} + \frac{w^4}{5!} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= -\frac{1}{w} + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}\right) w + \left(-\frac{1}{4!} + \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{5!} - \left(\frac{1}{3!}\right)^2\right) w^3 + \dots \\
&= -\frac{1}{z - \frac{\pi}{2}} + \frac{z - \frac{\pi}{2}}{3} + \frac{(z - \frac{\pi}{2})^3}{45} + \dots
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Ciascuna delle seguenti funzioni, si consideri il ramo principale per quelle polidrome, ha una singolarità in $z = 0$. Classificare la natura della singolarità e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo.

$$(a)\quad \tan\frac{1}{z} \qquad (b)\quad z^n \sin\frac{1}{z} \quad n \in \mathbb{N} \qquad (c)\quad \sqrt{1+\frac{1}{z}}$$

[punteggio 6]

(a) La funzione $\tan(1/z)$ ha come punti singolari $z = 0$ e

$$z_n = \pm\frac{2}{\pi(2n+1)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

soluzione di $\cos(1/z) = 0$. Pertanto $z = 0$ è un punto singolare non isolato. Si noti che la funzione è sviluppabile in serie di Laurent nell'anello $2/\pi < |z| < \infty$, ma il coefficiente di $1/z$ di questo sviluppo non è il residuo della funzione.

(b) Ricordando lo sviluppo notevole $\sin w = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k w^{2k+1}/((2k+1)!)$ valido per $|w| < \infty$ e posto $w = 1/z$, per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$z^n \sin\frac{1}{z} = z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\frac{1}{z^{2k-n+1}}$$

La singolarità in $z = 0$ è pertanto essenziale e si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0} z^n \sin\frac{1}{z} = \begin{cases} (-1)^{n/2}/(n+1)! & n \text{ pari} \\ 0 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

(c) La funzione

$$\sqrt{1+\frac{1}{z}} = \exp\left(\frac{1}{2}\log(1+1/z)\right)$$

ha una singolarità in $z = 0$ e un asse di diramazione corrispondente ai punti $1 + 1/z(t) = -t$, ovvero $z(t) = -1/(1+t)$, con $t \in [0, \infty)$. Pertanto la funzione considerata è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del segmento reale $[-1, 0]$. Il punto $z = 0$ è una singolarità non isolata. Si noti che la funzione è sviluppabile in serie di Laurent nell'anello $1 < |z| < \infty$

$$\sqrt{1+\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} \frac{1}{z^k} = 1 + \frac{1}{2z} - \frac{1}{8z^2} + \frac{1}{16z^3} + \ldots$$

ma il coefficiente di $1/z$ di questo sviluppo non è il residuo della funzione.

Esercizio 6 Sia $f(z)$ analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione di un numero finito di punti singolari $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Dimostrare che per ogni cammino C chiuso semplice orientato positivamente tale che $z_k \in \mathrm{Int}(C)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, si ha

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \ \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

[punteggio 5]

Per il teorema della curva di Jordan, $\exists\ R < \infty$ tale che C è contenuto all'interno del cerchio $|z| = R$. La funzione $f(z)$ è analitica in $A(0; R, \infty)$ e pertanto in tale regione anulare vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n \qquad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Il cammino C_0 è un arbitrario cammino chiuso semplice orientato positivamente tale che $C_0 \subset A(0; R, \infty)$ e $0 \in \mathrm{Int}(C_0)$, ad esempio il cerchio $|z| = R_0$ con $R_0 > R$. Poiché $f(z)$ è analitica su C, C_0 e nella regione compresa tra C e C_0, per il principio di deformazione dei cammini si ha

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz = 2\pi i \ c_{-1}$$

Poiché $f(z)$ ammette lo sviluppo di Laurent sopra riportato per $R < |z| < \infty$, ponendo $z = 1/w$ per $0 < |w| < 1/R$ si ha

$$\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\frac{1}{w}\right)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{w^{n+2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{-k-2} w^k$$

da cui segue

$$\operatorname*{Res}_{w=0} \frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right) = c_{-1}$$

Come volevasi dimostrare il coefficiente c_{-1} è il residuo in $z = 0$ della funzione $f(1/z)/z^2$, non certo di $f(z)$ che potrebbe anche essere analitica in $z = 0$.