METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 7 marzo 2003

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Dimostrare che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = B \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) = A + B$$

con $a_n, b_n, A, B \in \mathbb{C}$.

[punteggio 6]

Per ipotesi

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} a_n = A \qquad \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} b_n = B$$

quindi per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $N_a(\varepsilon)$ e $N_b(\varepsilon)$ tali che

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n - A \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad N > N_a$$

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n - B \right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad N > N_b$$

Posto allora $N_0 = \max(N_a, N_b)$, si ha

$$\left| \sum_{n=0}^{N-1} (a_n + b_n) - (A + B) \right| \leq \left| \sum_{n=0}^{N-1} a_n - A \right| + \left| \sum_{n=0}^{N-1} b_n - B \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

quando $N > N_0(\varepsilon)$. Questo implica, come richiesto, che

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N-1} (a_n + b_n) = A + B$$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a)\sum_{n=0}^{\infty}\cos(in)z^n \qquad (b)\sum_{n=0}^{\infty}(n+c^n)z^n \qquad (c)\sum_{n=1}^{\infty}3z^{\lfloor n\ln n\rfloor}$$

dove $c\in\mathbb{C}$ e $\lfloor x\rfloor$ con $x\in\mathbb{R}$ indica la parte intera di x.

[punteggio 9]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n=\cos(in)$, inoltre

$$|a_n|^{1/n}=\left|\frac{e^{iin}+e^{-iin}}{2}\right|^{1/n}=\left(\frac{e^{-n}+e^n}{2}\right)^{1/n}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} e$$

si ha quindi

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} \qquad R=1/e$$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n=n+c^n$, inoltre

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\frac{|n+c^n|}{|n+1+c^{n+1}|}\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\begin{cases}1 & |c|\le 1\\ |c|^{-1} & |c|>1\end{cases}$$

si ha quindi

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\begin{cases}1 & |c|\le 1\\ |c|^{-1} & |c|>1\end{cases}$$

(c) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n=\begin{cases}3 & n=\lfloor k\ln k\rfloor, \qquad k=1,2,3,\dots\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

si ha quindi

$$R^{-1}=\limsup_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\ge n}\left\{|a_k|^{1/k}\right\}=\lim_{n\to\infty}3^{1/n}=1 \qquad R=1$$

Esercizio 3 Sviluppare in serie di Mac Laurin la funzione

$$f(z) = \frac{1}{az+b} \qquad a, b \neq 0$$

e determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

[punteggio 8]

Si osservi che $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione del punto $z = -b/a$. Pertanto $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ per $|z| < |b/a|$. Poiché

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(z) &= -a(az+b)^{-2} \\
f^{(2)}(z) &= +2a^2(az+b)^{-3} \\
f^{(3)}(z) &= -6a^3(az+b)^{-4} \\
f^{(4)}(z) &= +24a^4(az+b)^{-5} \\
&\vdots \\
f^{(n)}(z) &= (-1)^n n! a^n (az+b)^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{az+b} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n n!}{n! b^{n+1}} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n
\end{aligned}$$

Il raggio di convergenza è anche calcolabile come

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a^n/b^{n+1}|}{|a^{n+1}/b^{n+2}|} = \frac{|b|}{|a|}$$

Alternativamente,

$$\frac{1}{az+b} = \frac{1}{b}\frac{1}{1+az/b} = \frac{1}{b}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(az/b)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^n}{b^{n+1}} z^n$$

che converge per $|az/b| < 1$, cioé per $|z| < |b|/|a|$.

Esercizio 4 Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = i$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^2}$$

specificando il dominio anulare di validità della serie così ottenuta.

[punteggio 9]

Poiché $(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$, la funzione $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z = \pm i$. Nella regione $0 < |z-i| < 2$ vale la rappresentazione

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-i)^n$$

con

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(z^2+1)^{-2}}{(z-i)^{n+1}}\, dz$$

dove C è un arbitrario cammino di integrazione chiuso orientato positivamente intorno a $z_0 = i$ e contenuto in $0 < |z-i| < 2$. Posto $g(z) = (z+i)^{-2}$, per il teorema di Cauchy-Goursat e dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{g(z)}{(z-i)^{n+3}}\, dz = \begin{cases} 0 & n \le -3 \\ \frac{g^{(n+2)}(i)}{(n+2)!} & n \ge -2 \end{cases}$$

Osservando che

$$\begin{aligned} g^{(1)}(z) &= -2(z+i)^{-3} \\ g^{(2)}(z) &= +6(z+i)^{-4} \\ g^{(3)}(z) &= -24(z+i)^{-5} \\ &\vdots \\ g^{(n)}(z) &= (-1)^n (n+1)!(z+i)^{-(n+2)} \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z^2+1)^2} &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}(n+3)!(2i)^{-(n+4)}}{(n+2)!}(z-i)^n \\ &= \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{(n+4)}}(z-i)^n \\ &= -\frac{1}{4}(z-i)^{-2} - \frac{i}{4}(z-i)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n(n+3)}{2^{(n+4)}}(z-i)^n \end{aligned}$$

E' possibile sviluppare $f(z)$ in serie di Laurent anche nella regione $2 < |z-i| < \infty$. Anziché seguire un procedimento analogo al precedente si ponga

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{1}{(z-i)^2(z-i+2i)^2} \\
&= \frac{1}{(z-i)^4}\frac{1}{\left[1+\left(\frac{2i}{z-i}\right)\right]^2} \\
&= \frac{-1}{(z-i)^4}\frac{d}{dw}\frac{1}{1+w}
\end{aligned}$$

dove $w = 2i/(z-i)$. Per $|w| < 1$, cioé $|z-i| > 2$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(z^2+1)^2} &= \frac{-1}{(z-i)^4}\frac{d}{dw}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^n \\
&= \frac{-1}{(z-i)^4}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n\left(\frac{2i}{z-i}\right)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n\frac{(2i)^{n-1}}{(z-i)^{n+3}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k (k+1)(2i)^k (z-i)^{-(k+4)}
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \int_0^z e^{s^2}\, ds$$

e determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

[punteggio 6]

Posto $g(z) = \exp(z^2)$ e cambiando $z \to z^2$ nello svilippo in serie di Taylor di $\exp(z)$, per $|z| < \infty$ si ha

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

Dal teorema sull'integrazione delle serie di potenze si ottiene

$$f(z) = \int_0^z g(s)\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^s s^{2n}\, ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left. \frac{s^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Il raggio di convergenza della serie è infinito come quello della serie che rappresenta $g(z)$. Alternativamente, un calcolo diretto fornisce

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n+1)!}{(2n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n+1)}{2n+1} = \infty$$

Esercizio 6 Sia X un insieme arbitrario non vuoto e d un'applicazione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \qquad \forall x, y \in X$$

Dimostrare che lo spazio (X, d) è uno spazio metrico (detto spazio di punti isolati).

[punteggio 7]

Occorre dimostrare che d soddisfa tutte le proprietà di una metrica. Le proprietà

$$\begin{aligned} d(x,y) &\geq 0 \\ d(x,y) &= d(y,x) \\ d(x,y) &= 0 \qquad \text{se e solo se } x = y \end{aligned}$$

sono verificate per definizione. Per verificare la disuguaglianza triangolare

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \forall x, y, z \in X$$

basta analizzare i cinque casi possibili

$$\begin{array}{lcl} x = y,\ x = z,\ y = z & : & 0 \leq 0 + 0 = 0 \\ x = y,\ x \neq z,\ y \neq z & : & 0 \leq 1 + 1 = 2 \\ x \neq y,\ x = z,\ y \neq z & : & 1 \leq 0 + 1 = 1 \\ x \neq y,\ x \neq z,\ y = z & : & 1 \leq 1 + 0 = 1 \\ x \neq y,\ x \neq z,\ y \neq z & : & 1 \leq 1 + 1 = 2 \end{array}$$