METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 9 febbraio 2005

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare e rappresentare graficamente il luogo dei punti $z \in \mathbb{C}$ tali che

$$0 \leq \operatorname{Arg}\left((z-1)^2\right) \leq \pi/2$$

[punteggio 5]

Posto $w = (z-1)^2$, nel piano $(\operatorname{Re} w, \operatorname{Im} w)$ la regione $0 \leq \operatorname{Arg} w \leq \pi/2$ coincide con il primo quadrante, cioè è l'insieme dei punti del tipo $w = ue^{i\varphi}$ con $u \geq 0$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. Poiché

$$\begin{aligned} z &= 1 + \sqrt{w} \\ &= 1 + \sqrt{u} e^{i(\varphi + 2\pi k)/2}, \qquad k = 0, 1, \end{aligned}$$

la regione nella quale $0 \leq \operatorname{Arg}((z-1)^2) \leq \pi/2$ è

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \ z = 1 + re^{i\theta}, \ r \geq 0, \ 0 \leq \theta \leq \pi/4, \ -\pi \leq \theta \leq -3\pi/4 \right\}.$$

Esercizio 2 Calcolare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni e graficarle nel piano complesso

$$(a)\quad z^4 - i = 0 \qquad (b)\quad z^i - 4 = 0$$

[punteggio 6]

(a) Le soluzioni distinte dell'equazione assegnata sono

$$z = \sqrt[4]{i} = \left(e^{i(\pi/2)}\right)^{1/4} = e^{i(\pi/2+2\pi k)/4} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

cioé esplicitamente

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i\pi/8} \\ z_1 &= e^{i5\pi/8} \\ z_2 &= e^{i9\pi/8} = e^{-i7\pi/8} \\ z_3 &= e^{i13\pi/8} = e^{-i3\pi/8} \end{aligned}$$

(b) Le soluzioni distinte dell'equazione assegnata sono

$$\begin{aligned} z &= 4^{1/i} = 4^{-i} \\ &= \exp\left[-i\log\left(4e^{i0}\right)\right] \\ &= \exp\left[-i\left(\ln 4 + i2\pi k\right)\right] \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \\ &= e^{2\pi k}e^{-i\ln 4} \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots \end{aligned}$$

Esercizio 3 Dimostrare che per arbitrari $z, w \in \mathbb{C}$ vale la disuguaglianza

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

[punteggio 5]

Dalla definizione di modulo si ha

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w \\
&= z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z\overline{w})
\end{aligned}$$

Usando la disuguaglianza

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|$$

valida per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ottiene

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|\overline{w}| \\
&= |z|^2 + |w|^2 + 2\,|z|\,|w| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

che è il quadrato della disuguaglianza da dimostrare.

Alternativamente, posto $z = x + iy$ e $w = u + iv$, per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ha

$$0 \leq (xv - yu)^2$$

Sviluppando e aggiungendo membro a membro $x^2u^2 + y^2v^2$ si ha

$$x^2u^2 + y^2v^2 \leq x^2v^2 + y^2u^2 - 2xvyu + x^2u^2 + y^2v^2$$

ovvero

$$x^2u^2 + y^2v^2 + 2xvyu \leq (x^2+y^2)(u^2+v^2)$$

Prendendo la radice quadrata, moltiplicando per 2 e aggiungendo $x^2 + y^2 + u^2 + v^2$ membro a membro, si ha

$$2(xu+yv) + x^2 + y^2 + u^2 + v^2 \leq 2\sqrt{(x^2+y^2)(u^2+v^2)} + x^2 + y^2 + u^2 + v^2$$

ovvero

$$(x+u)^2 + (v+y)^2 \leq \left(\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{u^2+v^2}\right)^2$$

che è il quadrato della disuguaglianza da dimostrare.

Esercizio 4 Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni

$$(a) \quad \exp\left(\frac{1}{1+z^2}\right) \qquad (b) \quad \log\left(z^3\right) \qquad \text{ramo principale}$$

[punteggio 6]

(a) Osservando che la funzione $\exp(z)$ è intera e la funzione razionale $1/(1+z^2)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti isolati $z = \pm i$, per la derivabilità delle funzioni composte, la funzione $\exp\big(1/(1+z^2)\big)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti isolati $z = \pm i$.

(b) Il ramo principale della funzione $\log(z)$ è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa. Pertanto il ramo principale della funzione $\log(z^3)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti z tali che

$$z^3 = -a \qquad \text{con } a \geq 0$$

cioé

$$z = (-a)^{1/3} = \sqrt[3]{a}e^{i(\pi+2\pi k)/3} \qquad k = 0, 1, 2 \qquad a \geq 0$$

ovvero nell'origine e lungo i tre semiassi uscenti dall'origine agli angoli $\pm\pi/3$ e π.

<u>Esercizio 5</u> Dimostrare che la funzione $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$u(x, y) = x^2 - y^2 + e^{-y} \cos x$$

è armonica in $\mathbb{R}^2$. Determinare la funzione $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ armonica coniugata alla $u(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$.

[punteggio 5]

Per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ si ha

$$u_x(x, y) = 2x - e^{-y} \sin x \qquad u_{xx}(x, y) = 2 - e^{-y} \cos x$$

$$u_y(x, y) = -2y - e^{-y} \cos x \qquad u_{yy}(x, y) = -2 + e^{-y} \cos x$$

e dunque $u_{xx}(x, y) + u_{yy}(x, y) = 0$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, cioé u è armonica in $\mathbb{R}^2$. La funzione v è armonica coniugata a u in $\mathbb{R}^2$ se e solo se la funzione $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathbb{C}$. Dalla prima delle equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$, si ha

$$2x - e^{-y} \sin x = v_y$$

che integrata rispetto a y fornisce

$$v(x, y) = 2xy + e^{-y} \sin x + \phi(x)$$

Imponendo la seconda equazione di Cauchy-Riemann, $u_y = -v_x$, si ha

$$2y + e^{-y} \cos x = 2y + e^{-y} \cos x + \phi'(x)$$

cioé $\phi'(x) = 0$, che integrata rispetto a x fornisce

$$\phi(x) = \text{const}$$

In conclusione, a meno di una costante,

$$v(x, y) = 2xy + e^{-y} \sin x$$

Posto $z = x + iy$, si ha

$$u(x, y) + iv(x, y) = z^2 + e^{iz} = f(z)$$

con $f(z)$ analitica in $\mathbb{C}$.

Esercizio 6 Determinare il raggio di convergenza R delle seguenti serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} n^3 e^{3n} z^n \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{(1+i)^{n^2}} z^n \qquad (c)\quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{n^3}$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^3 e^{3n}$. Inoltre

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \frac{e^{3n}}{e^{3(n+1)}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \frac{1}{e^3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e^3}$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{e^3}$$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \left(\frac{\log n}{(1+i)^n}\right)^n$$

Inoltre

$$|a_n|^{1/n} = \frac{\log n}{|1+i|^n} = \frac{\log n}{2^{n/2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

e quindi

$$R = \infty$$

(c) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta in forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = k^3 \qquad k = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

cioè $R = 1$