METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova di recupero 11 settembre 2006

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^4 - \frac{1+i}{z} = 0$$

e disegnarle nel piano complesso.

[punteggio 5]

Per $z \neq 0$ l'equazione data è equivalente a

$$z^5 = 1 + i$$

le cui soluzioni sono

$$\begin{aligned} z &= (1+i)^{1/5} \\ &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{1/5} \\ &= 2^{1/10}e^{i(\pi/4+2\pi k)/5} \qquad k = 0,1,2,3,4 \end{aligned}$$

L'equazione di partenza, dunque, ammette le cinque soluzioni

$$z = \sqrt[10]{2}e^{i\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i9\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i17\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i25\pi/20}, \quad \sqrt[10]{2}e^{i33\pi/20}$$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza R delle seguenti serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3}{e^{3n}} z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^3 e^{-3n}$. Inoltre

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 \frac{e^{3(n+1)}}{e^{3n}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^3 e^3 \xrightarrow{n\to\infty} e^3$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = e^3$$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ è

$$a_k = \begin{cases} \frac{(-1)^n}{n} & \text{se } k = n(n+1) \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} = \lim_{m\to\infty} \sup_{k\geq m} \left\{ \left(\frac{1}{n_k}\right)^{1/k}, 0 \right\}$$

dove n_k è l'intero definito dalla relazione $n_k(n_k+1) = k$. Si ha

$$\sup_{k\geq m} \left\{ \left(\frac{1}{n_k}\right)^{1/k}, 0 \right\} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k^{1/k}}} = 1$$

e quindi $R = 1$.

Esercizio 3 Determinare il valore dell'integrale

$$\int_{C_R} z \log z \; dz$$

dove C_R è la circonferenza di raggio R centrata in $z=0$ e percorsa in verso antiorario e $\log z$ è il ramo principale del logaritmo.

[punteggio 5]

La funzione integranda

$$z \log z = z\,(\ln|z| + i \arg z) \qquad |z|>0 \qquad -\pi \le \arg z < \pi$$

è continua su tutto C_R ad eccezione del punto $z=-R$. Conviene parametrizzare il cammino di integrazione come

$$C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta}, \; -\pi \le \theta \le \pi\}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} z \log z \; dz &= \int_{-\pi}^{+\pi} Re^{i\theta}(\ln R + i\theta)\; Re^{i\theta} i d\theta \\
&= iR^2 \ln R \int_{-\pi}^{+\pi} e^{2i\theta} d\theta - R^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \theta e^{2i\theta} d\theta \\
&= iR^2 \ln R \left[\frac{e^{2i\theta}}{2i}\right]_{-\pi}^{+\pi} - R^2 \left[e^{2i\theta}\left(\frac{1}{4} - \frac{i\theta}{2}\right)\right]_{-\pi}^{+\pi} \\
&= 0 - R^2\left(\frac{1}{4} - \frac{i\pi}{2} - \frac{1}{4} - \frac{i\pi}{2}\right) \\
&= \pi i R^2
\end{aligned}$$

Alternativamente, si osservi che per $z \in C_{R,\varepsilon}$ con

$$C_{R,\varepsilon} = \{z(\theta) = Re^{i\theta}, \; -(\pi-\varepsilon) \le \theta \le (\pi - \varepsilon)\} \qquad \varepsilon > 0$$

la funzione $z \log z$ ammette la primitiva $z^2(-1+2\log z)/4$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} z \log z \; dz &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_{R,\varepsilon}} z \log z \; dz \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{z^2}{4}(-1 + 2\log z)\right]_{Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \frac{R^2}{4}(-1 + 2(\ln R + i\pi)) - \frac{R^2}{4}(-1 + 2(\ln R - i\pi)) \\
&= \pi i R^2
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale della funzione

$$\log(z^2)$$

e il suo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 1$.

[punteggio 5]

Il ramo principale di $\log(z^2)$ è una funzione analitica in tutti i punti del piano complesso ad eccezione di quelli per cui $z^2 = -t$ con $t \in [0, +\infty)$ che sono i punti $z(t) = \pm it$ con $t \in [0, +\infty)$, cioé l'intero asse immaginario.
Osservando che

$$\frac{d}{dz}\log(z^2) = \frac{2}{z} = 2\,\frac{1}{1+(z-1)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k \qquad |z-1| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned}
\log(z^2) - \log(1^2) &= \int_1^z \frac{d\log(w^2)}{dw}\,dw \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_1^z (w-1)^k\,dw \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\log(z^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

che ha raggio di convergenza $R = 1$.
Alternativamente, si osservi che nella regione $\mathrm{Re}\, z > 0$ i rami principali delle funzioni $\log z$ e $\log(z^2)$ sono entrambe funzioni analitiche. Inoltre si ha $\log(z^2) = 2\log(z)$ quando, ad esempio, $z \in [1, 2]$. Pertanto in tutta la regione $\mathrm{Re}\, z > 0$ deve risultare

$$\log(z^2) = 2\log(z)$$

Utilizzando lo sviluppo notevole

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \qquad |z-1| < 1$$

si conclude che

$$\log(z^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \qquad |z-1| < 1$$

Esercizio 5 Classificare tutte le singolarità isolate delle seguenti funzioni e calcolarne i corrispondenti residui

$$(a)\ z\cos\left(z^{-1}\right) \qquad (b)\ z^{-1}\cos(z)$$

[punteggio 6]

(a) La funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 0$. Ricordando che per $|w| < \infty$ vale lo sviluppo notevole

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}$$

e posto $w = 1/z$, per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z\cos\left(z^{-1}\right) &= z\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}} \\ &= z - \frac{1}{2!z} + \frac{1}{4!z^3} - \frac{1}{6!z^5} + \ldots \end{aligned}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è essenziale e

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\ z\cos\left(z^{-1}\right) = -\frac{1}{2}$$

(b) Anche in questo caso la funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 0$. Per $0 < |z| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z^{-1}\cos(z) &= z^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ &= \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \ldots \end{aligned}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è un polo semplice e

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\ z^{-1}\cos(z) = 1$$

Esercizio 6 Dimostrare il seguente

Teorema 1 (unicità dello sviluppo in serie di Taylor)**.** *Se la serie di potenze* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *converge a* $f(z)$ *in tutti i punti interni a un qualche cerchio* $|z-z_0| = R$*, allora essa è l'espansione in serie di Taylor di* $f(z)$ *intorno a* z_0*.*

[punteggio 6]

Dimostrazione. Per ipotesi si ha

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k, \qquad |z-z_0| < R$$

Posto

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}$$

poiché la funzione $g(z)$ è continua su qualsiasi cammino chiuso semplice C interno al cerchio $|z-z_0| = R$ e contenente il punto z_0, possiamo scrivere

$$\int_C g(z)f(z)dz = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_C g(z)(z-z_0)^k dz$$

Per la formula integrale di Cauchy, il membro di sinistra di questa ugualianza fornisce

$$\int_C g(z)f(z)dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

D'altro canto si ha

$$\int_C g(z)(z-z_0)^k dz = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z-z_0)^{n+1-k}} dz = \delta_{n,k}$$

e pertanto

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n$$

$\square$

COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova di recupero 11 settembre 2006

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	

Esercizio 1 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{x}(x^2+1)}\,dx$$

[punteggio 12]

Si ponga

$$f(z) = \frac{z^a}{z^2+1} = \frac{e^{a\log z}}{z^2+1} \qquad |z|>0 \qquad 0<\arg z<2\pi$$

con $a=-1/3$. Il seguente svolgimento è valido per ogni $-1<a<1$. Nel dominio specificato $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione dei due poli semplici in $z=\pm i$ dove ha residui

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{e^{a\log z}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^{a(\ln 1+i\pi/2)}}{i+i} = \frac{e^{i\pi a/2}}{2i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \left.\frac{e^{a\log z}}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{e^{a(\ln 1+i3\pi/2)}}{-i-i} = \frac{e^{i3\pi a/2}}{-2i}$$

L'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso $C=L_1\cup C_R\cup L_2\cup C_\rho$ dove $L_1=\{z(x)=x+i0,\ \rho\le x\le R\}$, $C_R=\{z(\theta)=Re^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$, $L_2=\{z(x)=x-i0,\ R\ge x\ge\rho\}$ e $C_\rho=\{z(\theta)=\rho e^{i\theta},\ 2\pi\ge\theta\ge 0\}$ vale quindi, per $R>1$ e $\rho<1$,

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz &= \int_{L_1} f(z)\,dz + \int_{C_R} f(z)\,dz + \int_{L_2} f(z)\,dz + \int_{C_\rho} f(z)\,dz \\ &= 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right] \\ &= \pi\left(e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2}\right)\end{aligned}$$

Per i singoli integrali si ha

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_\rho^R \frac{e^{a(\ln x+i0)}}{(xe^{i0})^2+1}e^{i0}dx = \int_\rho^R \frac{e^{a\ln x}}{x^2+1}dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_R^\rho \frac{e^{a(\ln x+i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2+1}e^{i2\pi}dx = -e^{i2\pi a}\int_\rho^R \frac{e^{a\ln x}}{x^2+1}dx$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\,dz\right| \le \frac{e^{a\ln R}}{R^2-1}\,2\pi R \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{se } a<1$$

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\,dz\right| \le \frac{e^{a\ln \rho}}{1-\rho^2}\,2\pi \rho \xrightarrow{\rho\to 0} 0 \qquad \text{se } -1<a$$

In conclusione, prendendo i limiti $R\to\infty$ e $\rho\to 0$ per $-1<a<1$ si ottiene

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}\,dx &= \frac{\pi\left(e^{i\pi a/2}-e^{i3\pi a/2}\right)}{1-e^{i2\pi a}} = \frac{\pi e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a/2}-e^{i\pi a/2}\right)}{e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a}-e^{i\pi a}\right)} \\ &= \frac{\pi\sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)} = \frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)} = \frac{\pi/2}{\cos(\pi/6)} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Esercizio 2 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(5+3\cos\theta)^2}$$

[punteggio 11]

Ponendo $e^{i\theta} = z$, si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = \int_{|z|=1} f(z)\ dz$$

dove $a=5$, $b=3$ e

$$f(z) = \frac{-4iz}{(bz^2+2az+b)^2}$$

Poiché le radici di $bz^2+2az+b=0$ sono i numeri reali

$$z_\pm = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}$$

con $z_- < -1$ e $-1 < z_+ < 0$ (si osservi che $z_+z_- = 1$) la funzione $f(z)$ ha all'interno del cerchio $|z| = 1$ una singolarità isolata in $z = z_+$. Tale singolarità è un polo doppio in quanto

$$f(z) = \frac{-4iz}{b^2(z-z_-)^2(z-z_+)^2} = \frac{\phi(z)}{(z-z_+)^2}$$

con

$$\phi(z) = \frac{-4iz}{b^2(z-z_-)^2}$$

analitica e non nulla in z_+. Il corrispondente residuo vale

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) &= \phi'(z_+) \\ &= \frac{-4i}{b^2}\frac{(z_+-z_-)-2z_+}{(z_+-z_-)^3} = \frac{-ia}{(a^2-b^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+b\cos\theta)^2} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}} = \frac{5\pi}{32}$$

Esercizio 3 Determinare la funzione $v(x,y)$ armonica coniugata alla funzione $u(x,y) = \sin(x^2 - y^2)\cosh(2xy)$ nell'intero piano xy.

[punteggio 10]

Nella regione considerata, v è armonica coniugata di u se e solo se $f = u+iv$ è analitica. Devono pertanto essere soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Dalla seconda si ha

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= -u_y(x,y) \\ &= 2y\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) - 2x\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) \\ &= \frac{d}{dx}\left[\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy)\right] \end{aligned}$$

che risolta da

$$v(x,y) = \cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) + \phi(y)$$

e dalla prima

$$\begin{aligned} v_y(x,y) &= 2y\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) + 2x\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) + \phi'(y) \\ &= u_x(x,y) \\ &= 2x\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) + 2y\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) \end{aligned}$$

ovvero

$$\phi'(y) = 0$$

che risolta da

$$\phi(y) = \text{constant}$$

In conclusione, a meno di una costante,

$$v(x,y) = \cos(x^2-y^2)\sinh(2xy)$$

Si noti che

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \sin\left(z^2\right)$$

dove $z = x + iy$.