METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova finale 12 aprile 2005

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2	3

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

<u>Esercizio 1</u> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$z^5 - (1+i)z = 0$$

e disegnarle nel piano complesso.

[punteggio 4]

Riscritta l'equazione nella forma

$$z\left[z^4 - (1+i)\right] = 0$$

le soluzioni sono $z = 0$ e

$$\begin{aligned} z &= (1+i)^{1/4} \\ &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^{1/4} \\ &= 2^{1/8}e^{i(\pi/4+2\pi k)/4} \qquad k = 0,1,2,3 \end{aligned}$$

cioé

$$z = 0, \quad 2^{1/8}e^{i\pi/16}, \quad 2^{1/8}e^{i9\pi/16}, \quad 2^{1/8}e^{i17\pi/16}, \quad 2^{1/8}e^{i25\pi/16}$$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{1+n+n^2+n^3} \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 3^n z^n$$

[punteggio 4]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta in forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} (-1)^k & \text{se } n = 1 + k + k^2 + k^3 \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

cioè $R = 1$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^2 3^n$ e si ha

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n^2 3^n}{(n+1)^2 3^{n+1}} = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/3$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale della funzione $\arcsin z$ e il valore della sua derivata in tale dominio.

[punteggio 5]

Posto $\arcsin z = w$, si ha $z = \sin w = (e^{iw} - e^{-iw})/2i$ ovvero

$$\left(e^{iw}\right)^2 - 2ize^{iw} - 1 = 0$$

la cui soluzione è $e^{iw} = iz + \sqrt{1-z^2}$. In conclusione,

$$\arcsin z = -i \log\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$$

Il ramo principale di tale funzione è definito prendendo i rami principali della radice e del logaritmo. Il ramo principale di $\sqrt{1-z^2} = \exp[\frac{1}{2}\log(1-z^2)]$ è una funzione analitica ovunque in $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti z tali che $1 - z^2 = -u$ con $u \in [0,\infty)$. Tali punti

$$z(u) = \pm\sqrt{1+u} \qquad u \in [0,\infty)$$

rappresentano le semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$. Il ramo principale di $\log(iz+\sqrt{1-z^2})$ risulta non analitico nei punti che soddisfano $iz+\sqrt{1-z^2} = -t$ con $t \in [0,\infty)$. La soluzione di questa equazione ottenuta quadrando l'espressione equivalente $\sqrt{1-z^2} = -(t+iz)$ fornisce

$$z(t) = i\frac{t^2-1}{2t} \qquad t \in [0,\infty)$$

che rappresenta l'intero asse immaginario. Tuttavia i punti $z(t)$ così trovati non soddisfano l'equazione di partenza in cui per la radice si considera il ramo principale, infatti $\sqrt{1-z(t)^2} = \sqrt{1+(t^2-1)^2/(4t^2)} > 0$ mentre $-(t+iz(t)) = -(t^2+1)/2t < 0$: si tratta di una soluzione spuria introdotta dall'operazione di elevazione al quadrato. In conclusione, il dominio di analiticità di $\arcsin z$ è tutto il piano complesso ad eccezione delle semirette reali $(-\infty,-1]$ e $[1,+\infty)$.
Nella regione di analiticità la derivata vale

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\arcsin z &= -i\frac{1}{iz+\sqrt{1-z^2}}\left(i + \frac{1}{2}\frac{-2z}{\sqrt{1-z^2}}\right)\\ &= \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\end{aligned}$$

Esercizio 4 Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_C \sin(z^{-1})\ dz$$

dove C è la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario.

[punteggio 4]

La funzione $\sin(z^{-1})$ è analitica su e dentro C ad eccezione della singolarità essenziale in $z = 0$. Per $0 < |z| < \infty$ vale infatti lo sviluppo in serie di Laurent

$$\sin(z^{-1}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{-(2k+1)} = z^{-1} - \frac{1}{3!}z^{-3} + \frac{1}{5!}z^{-5} - \frac{1}{7!}z^{-7} + \dots$$

Da questo sviluppo risuta

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \sin(z^{-1}) = 1$$

e dal teorema dei residui

$$\int_C \sin(z^{-1})\ dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \sin(z^{-1}) = 2\pi i$$

Esercizio 5 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale della funzione

$$\log(z^2)$$

e il suo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 1$.

[punteggio 5]

Il ramo principale di $\log(z^2)$ è una funzione analitica in tutti i punti del piano complesso ad eccezione di quelli per cui $z^2 = -t$ con $t \in [0, +\infty)$ che sono i punti $z(t) = \pm it$ con $t \in [0, +\infty)$, cioé l'intero asse immaginario.
Osservando che

$$\frac{d}{dz}\log(z^2) = \frac{2}{z} = 2\,\frac{1}{1+(z-1)} = 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k \qquad |z-1| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned}
\log(z^2) - \log(1^2) &= \int_1^z \frac{d\log(w^2)}{dw}\,dw \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \int_1^z (w-1)^k\,dw \\
&= 2\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-1)^{k+1}}{k+1} \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\log(z^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n$$

che ha raggio di convergenza $R = 1$.
Alternativamente, si osservi che nella regione $\operatorname{Re} z > 0$ i rami principali delle funzioni $\log z$ e $\log(z^2)$ sono entrambe funzioni analitiche. Inoltre si ha $\log(z^2) = 2\log(z)$ quando, ad esempio, $z \in [1, 2]$. Pertanto in tutta la regione $\operatorname{Re} z > 0$ deve risultare

$$\log(z^2) = 2\log(z)$$

Utilizzando lo sviluppo notevole

$$\log z = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \qquad |z-1| < 1$$

si conclude che

$$\log(z^2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(z-1)^n \qquad |z-1| < 1$$

Esercizio 6 Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta \qquad n \text{ intero non negativo}$$

[punteggio 5]

Posto $z = e^{i\theta}$ e detto C il cammino $|z| = 1$ percorso in verso antiorario, si ha

$$\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta = \int_C \left(\frac{z - z^{-1}}{2i}\right)^{2n} \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{(z^2-1)^{2n}}{i(-1)^n 2^{2n} z^{2n+1}}\, dz$$

La funzione integranda è analitica su e dentro il cammino C ad eccezione del polo di ordine $2n+1$ in $z = 0$. Usando l'espansione del binomio di Newton

$$\frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{1}{z^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n} \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} (z^2)^k (-1)^{2n-k}$$

e osservando che quello trovato altro non è che lo sviluppo in serie di Laurent di $(z^2-1)^{2n}/z^{2n+1}$, poiché il termine proporzionale a z^{-1} è ottenuto per $k = n$, si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} = \frac{(2n)!}{n!n!}(-1)^n$$

Pertanto dal teorema dei residui

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n}\, d\theta &= \frac{1}{i(-1)^n 2^{2n}}\; 2\pi i\; \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{(z^2-1)^{2n}}{z^{2n+1}} \\
&= \frac{\pi(2n)!}{2^{2n-1}(n!)^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 7 Calcolare la serie di Fourier della funzione

$$f(t) = \sin(at) \qquad a > 0$$

definita per $t \in (-\pi, \pi)$. Studiare: l'andamento dei coefficienti per grandi n, dove n è l'ordine; il limite $a \to k$, dove k è un intero.

[punteggio 4]

Posto

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)]$$

si ha

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ dt = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt)\ dt = 0 \qquad n > 1$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt)\ dt \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{iat} - e^{-iat}\right)\left(e^{int} - e^{-int}\right)\ dt \\
&= -\frac{1}{4\pi} \left[\frac{e^{i(n+a)t}}{i(n+a)} + \frac{e^{-i(n+a)t}}{-i(n+a)} - \frac{e^{i(n-a)t}}{i(n-a)} - \frac{e^{-i(n-a)t}}{-i(n-a)}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin[(n+a)\pi]}{n+a} - \frac{\sin[(n-a)\pi]}{n-a}\right] \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{(-1)^n \sin(a\pi)}{n+a} + \frac{(-1)^n \sin(a)\pi]}{n-a}\right] \\
&= \frac{(-1)^n 2n \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - n^2)} \qquad n > 1
\end{aligned}$$

I coefficienti b_n asintoticamente decrescono come n^{-1} in quanto $f(t)$ è discontinua in $t = \pm\pi$.
Quando a tende all'intero k si ha

$$\lim_{a \to k} b_n = \delta_{n,k}$$

Esercizio 8 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$g(t) = \frac{1}{(t + it_0)^2} \qquad t_0 > 0$$

Qual'è la relazione tra le trasformate di Fourier della $g(t)$ e della funzione $1/(t + it_0)$?

[punteggio 4]

Definendo

$$\tilde{g}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}\, dt$$

e osservando che $g(z) = 1/(z + it_0)^2$ ha un polo doppio in $z = -it_0$ per $\omega < 0$ l'integrale va calcolato nel semipiano immaginario positivo e vale 0. Per $\omega > 0$ si ha invece

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)e^{-i\omega t}\, dt = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-it_0} \frac{e^{-i\omega z}}{(z + it_0)^2} = -2\pi\omega e^{-\omega t_0}$$

In conclusione

$$\tilde{g}(\omega) = -2\pi\omega e^{-\omega t_0}\theta(\omega)$$

La funzione con il polo doppio si ottiene da quella con il polo semplice derivando rispetto a t oppure a t_0. Posto $f(t) = 1/(t + it_0)$ si ha

$$g(t) = i\frac{d}{dt_0} f(t)$$

e quindi

$$\tilde{g}(\omega) = i\frac{d}{dt_0}\tilde{f}(\omega) \qquad \tilde{f}(\omega) = -2\pi i e^{-\omega t_0}\theta(\omega)$$