METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova di recupero 14 settembre 2005

Cognome	
Nome	
Corso di Laurea	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2	3

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

<u>Esercizio 1</u> Determinare e graficare il luogo dei punti z del piano complesso tali che

$$\cos z = a \qquad a \in \mathbb{R}, \;\; |a| > 1$$

[punteggio 4]

Si ha

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a$$

ovvero

$$e^{2iz} - 2ae^{iz} + 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^{iz} = a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Si noti che per $|a| > 1$ il radicando è positivo.
Se $a > 1$ le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} iz &= \log\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right) \\ &= \ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right) + i2\pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

ovvero

$$z = -i \ln\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right) + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

che rappresentano gli assi immaginari per $z = 2k\pi$ ad eccezione dei punti $z = 2k\pi$.
Se $a < -1$ le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} iz &= \log\left[-\left(a \pm \sqrt{a^2-1}\right) e^{i\pi}\right] \\ &= \ln\left(-a \mp \sqrt{a^2-1}\right) + i(\pi + 2\pi k) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

ovvero

$$z = -i \ln\left(-a \mp \sqrt{a^2-1}\right) + (2k+1)\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

che rappresentano gli assi immaginari per $z = (2k+1)\pi$ ad eccezione dei punti $z = (2k+1)\pi$.

Esercizio 2 Dimostrare che le due serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n n^c z^n \qquad c \in \mathbb{C}$$

hanno lo stesso raggio di convergenza. Determinare tale raggio nel caso in cui $a_n = e^{-n}$.

[punteggio 4]

Il raggio di convergenza R della serie (b) è

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n n^c|^{1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} \left(|a_n|^{1/n} \quad |n^c|^{1/n} \right) \end{aligned}$$

Poiché esiste ed è positivo il limite

$$\lim_{n\to\infty} |n^c|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^c n^{\bar{c}}} \right)^{1/n} = \lim_{n\to\infty} n^{\mathrm{Re}\, c/n} = 1$$

per le proprietà del $\limsup$ si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \lim_{n\to\infty} |n^c|^{1/n} \\ &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \end{aligned}$$

che è l'inverso del raggio di convergenza della serie (a).
Nel caso in cui $a_n = e^{-n}$ si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-n/n} = e^{-1} \end{aligned}$$

ovvero $R = e$.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale delle seguenti funzioni e il valore delle rispettive derivate in tale dominio

$$(a) \quad \log\left(z^4\right) \qquad (b) \quad \sin\sqrt{z}$$

[punteggio 5]

Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei punti tali che

$$z^4 = -t, \qquad t \in [0, \infty)$$

ovvero

$$z = \left(te^{i\pi}\right)^{1/4} = t^{1/4} e^{i(\pi+2\pi k)/4} \qquad k = 0, 1, 2, 3$$

Le quattro soluzioni $z_k(t) = \sqrt[4]{t} e^{i(\pi/4+k\pi/2)}$, $k = 0, 1, 2, 3$, rappresentano rispettivamente le bisettrici dei quadranti $1, 2, 3, 4$. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \log\left(z^4\right) = \frac{4}{z}$$

La funzione $\sin z$ è intera mentre il ramo principale di $\sqrt{z} = \exp(\frac{1}{2} \log z)$ è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo. Pertanto la funzione in esame è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\frac{d}{dz} \sin\sqrt{z} = \frac{\cos\sqrt{z}}{2\sqrt{z}}$$

Esercizio 4 Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

[punteggio 4]

Teorema 1 (Liouville)**.** *Se $f(z)$ è intera e limitata nel piano complesso, allora $f(z)$ è costante su tutto il piano.*

Poiché per ipotesi la funzione $f(z)$ è analitica su tutto il piano complesso, per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale la formula integrale di Cauchy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{(s-z)^2}\, ds$$

dove C_R è una ciconferenza centrata in z e di raggio R arbitrario. D'altro canto poiché esiste $M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ottiene

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

Dalla arbitrarietà di R segue che $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dunque $f(z)$ è costante sull'intero piano complesso.

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Laurent la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z + z^3}$$

(a) intorno a $z_0 = 0$ nella regione anulare $0 < |z| < 1$ e (b) intorno a $z_0 = i$ nella regione anulare $0 < |z - i| < 1$.

[punteggio 4]

(a) Per $0 < |z| < 1$ possiamo scrivere

$$f(z) = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1 + z^2}$$

e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \qquad |w| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \left(z^2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n-1} \\ &= \frac{1}{z} - z + z^3 - z^5 + \dots \end{aligned}$$

(b) Per $0 < |z - i| < 1$ possiamo invece scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-i)(z+i)} \\ &= \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{i}}\,\frac{1}{2i}\,\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} \\ &= \frac{1}{z-i}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}} - \frac{2}{1+\frac{z-i}{i}}\right) \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{1}{z+z^3} &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{z-i}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{2^n i^n} - 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{i^n}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} i^n\left(2^{-(n+1)} - 1\right)(z-i)^{n-1} \\ &= -\frac{1}{2(z-i)} - \frac{3}{4}i + \frac{7}{8}(z-i) + \frac{15}{16}i(z-i)^2 - \frac{31}{32}(z-i)^3 - \frac{63}{64}i(z-i)^4 + \dots \end{aligned}$$

Esercizio 6 Ciascuna delle seguenti funzioni ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo.

$$(a)\quad \frac{1}{1-\cos z} \qquad (b)\quad \frac{\sqrt{z}}{z^2} \qquad (c)\quad z\exp\left(z^{-2}\right)$$

[punteggio 5]

(a) La funzione $1-\cos z$ è intera e in $z=0$ ha uno zero doppio isolato

$$1-\cos z = 1-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}z^{2k} = \frac{z^2}{2!}\left(1-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)$$

Pertanto la funzione $1/(1-\cos z)$ ha in $z=0$ un polo doppio. Nella regione anulare $0<|z|<\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-\cos z} &= \frac{2!}{z^2}\frac{1}{1+\left(-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)}\\ &= \frac{2!}{z^2}\left[1-\left(-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)+\left(-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\dots\right)^2+\dots\right]\\ &= \frac{2!}{z^2}+\frac{(2!)^2}{4!}+\mathcal{O}\left(z^2\right)\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{1-\cos z}=0$$

(b) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$\frac{\sqrt{z}}{z^2}=z^{-3/2}=e^{-\frac{3}{2}\log z}$$

ha in $z=0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0<|z|<\varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

(c) In questo caso per $0<|z|<\infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}ze^{1/z^2} &= z\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-2k+1}\\ &= z+\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^3}+\frac{1}{6z^5}+\dots\end{aligned}$$

Quindi $z=0$ è una singolarità essenziale di ze^{1/z^2} e si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0} ze^{1/z^2}=1$$

Esercizio 7 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} \qquad a > 1$$

[punteggio 4]

Ponendo $e^{i\theta} = z$ si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \int_C f(z)\ dz$$

dove $C = \{z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ e

$$f(z) = \frac{-2iz}{(z^2 + 2az + 1)^2}$$

La funzione $f(z)$ ha due poli doppi in

$$z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$$

Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+ z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino C mentre quello in z_- è esterno e quindi

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) \\
&= 2\pi i \left.\frac{d}{dz}\frac{-2iz}{(z-z_-)^2}\right|_{z=z_+} \\
&= 2\pi i\ \frac{2i(z_+ + z_-)}{(z_+ - z_-)^3} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}$$

Esercizio 8 (per Fisica) Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\, dx \qquad a>0,\ \omega\in\mathbb{R}$$

Suggerimento: si considerino separatamente i casi $\omega > 0$ e $\omega < 0$.

[punteggio 5]

Posto $f(z) = e^{-i\omega z}/(z^2+a^2)$ e detti $C_\pm = L_R \cup C_{R\pm}$ i cammini chiusi di integrazione con

$$\begin{aligned} L_R &= \{z(x) = x,\ -R \le x \le R\} \\ C_{R\pm} &= \{z(\theta) = Re^{\pm i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\} \end{aligned}$$

si osservi che per $R \to \infty$ la funzione $f(z)$ si annulla su C_{R+} se $\omega < 0$ e su C_{R-} se $\omega > 0$. Inoltre $f(z)$ è analitica su e dentro $C_\pm$ ad eccezione del polo semplice in $z = \pm ia$. Per $\omega < 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{C_+} f(z)\, dz &= \int_{L_R} f(z)\, dz + \int_{C_{R+}} f(z)\, dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{z+ia}\right|_{z=ia} = \pi\frac{e^{\omega a}}{a} \end{aligned}$$

mentre per $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \int_{C_-} f(z)\, dz &= \int_{L_R} f(z)\, dz + \int_{C_{R-}} f(z)\, dz \\ &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-ia} f(z) = -2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{z-ia}\right|_{z=-ia} = \pi\frac{e^{-\omega a}}{a} \end{aligned}$$

Si noti il segno negativo dovuto al verso di percorrenza negativo su C_-. I singoli cammini di integrazione valgono

$$\int_{L_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\, dx$$

$$\int_{C_{R\pm}} f(z)\, dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i\omega R(\cos\theta \pm i\sin\theta)}}{R^2 e^{\pm i2\theta}+a^2} \left(\pm iRe^{\pm i\theta}\right) d\theta$$

e quindi

$$\left|\int_{C_{R-\mathrm{sgn}(\omega)}} f(z)\, dz\right| \le \pi\, \frac{R}{R^2-a^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

In conclusione nel limite $R \to \infty$ per ogni valore di ω, compreso il caso banale $\omega = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-|\omega| a}$$

Esercizio 8 (per Astrofisica) Calcolare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(t) = \frac{1}{t^2 + a^2} \qquad a > 0$$

Utilizzare il risultato ottenuto per calcolare la trasformata di Fourier della funzione $g(t) = 1/(t^2 + a^2)^2$.

[punteggio 5]

Occorre calcolare l'integrale

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt$$

con $\omega \in \mathbb{R}$. La funzione complessa $f(z) = 1/(z^2 + a^2)$ ha poli semplici in $z = \pm ia$. Per $\omega < 0$ l'integrale va calcolato nel semipiano immaginario positivo (cammino di integrazione percorso in verso positivo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + a^2} = \pi \frac{e^{\omega a}}{a}$$

Per $\omega > 0$ l'integrale va calcolato nel semipiano immaginario negativo (cammino di integrazione percorso in verso negativo)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \, dt = -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-ia} \frac{e^{-i\omega z}}{z^2 + a^2} = \pi \frac{e^{-\omega a}}{a}$$

In conclusione

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{\pi}{a} \, e^{-|\omega| a}$$

Osservando che

$$\frac{1}{(t^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \frac{1}{t^2 + a^2}$$

si ha

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\omega) &= -\frac{1}{2a} \frac{d}{da} \tilde{f}(\omega) \\ &= \frac{\pi}{2a^3} \left(1 + |\omega| \, a\right) e^{-|\omega| a} \end{aligned}$$