METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 17 marzo 2005

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare il valore dell'integrale

$$\int_C \frac{e^z}{z^2\sqrt{3+z}}dz$$

dove C è il cammino, percorso in verso antiorario, costituito dal quadrato di vertici 1, i, -1, $-i$.

[punteggio 5]

Il ramo principale della funzione

$$f(z) = e^z(3+z)^{-1/2} = \exp\left[z - \frac{1}{2}\log(3+z)\right]$$

è analitico in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti

$$z = -3 - t \qquad t \in [0, \infty)$$

Pertanto $f(z)$ è analitica su e dentro il cammino C. Per la formula integrale di Cauchy

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{e^z}{z^2\sqrt{3+z}}dz &= \int_C \frac{f(z)}{z^2}dz \\
&= \frac{2\pi i}{1!}f'(0) \\
&= 2\pi i\left(1 - \frac{1}{2(3+z)}\right)\exp\left[z - \frac{1}{2}\log(3+z)\right]\Bigg|_{z=0} \\
&= \frac{5\pi i}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Esercizio 2 Dimostrare che una funzione $f(z)$ analitica in z_0 ha in z_0 uno zero di ordine m se e solo se esiste una funzione $g(z)$ analitica e non nulla in z_0 tale che $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$.

[punteggio 5]

Si supponga dapprima che $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$ con $g(z)$ analitica e non nulla in z_0. Poiché $g(z)$ è analitica in z_0, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per $|z - z_0| < \varepsilon$ vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k$$

Allora nello stesso intorno di z_0

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{k+m}$$

Dal'unicità dello sviluppo in serie di Taylor di $f(z)$ segue che

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \qquad f^{(m)}(z_0) = m!\, g(z_0) \neq 0$$

dunque z_0 è uno zero di ordine m di $f(z)$.
Viceversa si supponga che z_0 sia uno zero di ordine m di $f(z)$, ovvero che

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \qquad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

Poiché $f(z)$ è analitica in z_0, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per $|z - z_0| < \varepsilon$ vale lo sviluppo in serie di Taylor

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \\
&= (z - z_0)^m \sum_{k=m}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^{m-k} \\
&= (z - z_0)^m g(z)
\end{aligned}$$

La funzione $g(z)$ in quanto somma di una serie di potenze convergente in $|z - z_0| < \varepsilon$ è analitica in z_0. Inoltre

$$g(z_0) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \neq 0$$

<u>Esercizio 3</u> Sviluppare in serie di Taylor di centro $z_0 = -1$ il ramo principale della funzione $\log(z^2)$ e determinare il raggio di convergenza di tale serie.

[punteggio 6]

Il ramo principale di $\log z$

$$\log z = \ln|z| + i \arg z \qquad |z| > 0 \qquad -\pi < \arg z \leq \pi$$

è analitico in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo origine compresa. Pertanto la funzione $\log(z^2)$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dell'intero asse immaginario. Il massimo cerchio di centro $z_0 = -1$ all'interno del quale $\log(z^2)$ è analitica ha raggio 1. Detto z un qualsiasi punto tale che $|z+1| < 1$ e osservando che $d\log(z^2)/dz = 2z^{-1}$ si ha

$$\begin{aligned}
\log(z^2) - \log((-1)^2) &= \int_{-1}^{z} \frac{2}{w}\, dw \\
&= -2 \int_{-1}^{z} \frac{1}{1-(w+1)}\, dw \\
&= -2 \int_{-1}^{z} \sum_{k=0}^{\infty} (w+1)^k\, dw \\
&= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-1}^{z} (w+1)^k\, dw \\
&= -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+1)^{k+1}}{k+1} \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(z+1)^n
\end{aligned}$$

In conclusione, osservando che $\log((-1)^2) = 0$,

$$\begin{aligned}
\log(z^2) &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}(z+1)^n \\
&= -2(z+1) - (z+1)^2 - \frac{2}{3}(z+1)^3 - \frac{2}{4}(z+1)^4 - \frac{2}{5}(z+1)^5 + \ldots
\end{aligned}$$

Una verifica diretta conferma che il raggio di convergenza di questa serie di potenze è $R = 1$. Infatti, detto a_n il coefficiente n-esimo della serie, si ha

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{2}{n}\ \frac{n+1}{2}\right| = \frac{n+1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Esercizio 4 Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = i$, in entrambe le regioni anulari $0 < |z-i| < 2$ e $2 < |z-i| < \infty$, la funzione

$$f(z) = \frac{1}{z^2+1}$$

[punteggio 6]

Per $0 < |z-i| < 2$ possiamo scrivere la funzione $f(z)$ nella forma

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)(z-i+2i)} = \frac{1}{2i(z-i)} \frac{1}{1+\frac{z-i}{2i}}$$

Posto $w = (z-i)/2i$ e usando lo sviluppo notevole

$$\frac{1}{1+w} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n w^n \qquad |w| < 1$$

si ha

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{2i(z-i)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-i}{2i} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2i)^{n+1}} (z-i)^{n-1} \\
&= -\frac{i}{2} \frac{1}{z-i} + \frac{1}{2^2} + \frac{i}{2^3}(z-i) - \frac{1}{2^4}(z-i)^2 - \frac{i}{2^5}(z-i)^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Per $2 < |z-i| < \infty$ possiamo invece scrivere

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{(z-i)(z-i+2i)} = \frac{1}{(z-i)^2} \frac{1}{1+\frac{2i}{z-i}}$$

Posto ora $w = 2i/(z-i)$ nella regione anulare considerata si ha $|w| < 1$ e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2+1} &= \frac{1}{(z-i)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2i}{z-i} \right)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2i)^n (z-i)^{-n-2} \\
&= \frac{1}{(z-i)^2} - \frac{2i}{(z-i)^3} - \frac{2^2}{(z-i)^4} + \frac{2^3 i}{(z-i)^5} + \frac{2^4}{(z-i)^6} + \ldots
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} \qquad a>1$$

[punteggio 5]

Ponendo $e^{i\theta}=z$ si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \int_C f(z)\ dz$$

dove $C=\{z(\theta)=e^{i\theta},\ 0\le\theta\le 2\pi\}$ e

$$f(z) = \frac{-i}{z^2+2az+1}$$

La funzione $f(z)$ ha due poli semplici in

$$z_{\pm} = -a \pm \sqrt{a^2-1}$$

Si osservi che $|z_-|>1$ e, poiché $z_+z_-=1$, $|z_+|<1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino C mentre quello in z_- è esterno e quindi

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z)\\ &= 2\pi i \left.\frac{-i}{z-z_-}\right|_{z=z_+}\\ &= \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^{\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

Esercizio 6 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\ dx$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = e^{iz}/[z(z^2+1)]$ e detto $C = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\rho$ il cammino chiuso di integrazione con

$$\begin{aligned} L_1 &= \{z(x) = x,\ \rho \le x \le R\} \\ C_R &= \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\} \qquad R > 1 \\ L_2 &= \{z(x) = -x,\ R \ge x \ge \rho\} \\ C_\rho &= \{z(\theta) = \rho e^{i\theta},\ \pi \ge \theta \ge 0\} \qquad \rho < 1 \end{aligned}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = i$

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\ dz &= \int_{L_1} f(z)\ dz + \int_{C_R} f(z)\ dz + \int_{L_2} f(z)\ dz + \int_{C_\rho} f(z)\ dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{iz}}{z(z+i)}\right|_{z=i} = -i\pi e^{-1} \end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\ dz = \int_\rho^R \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\ dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\ dz = \int_R^\rho \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)}\ dx = -\int_\rho^R \frac{e^{-ix}}{x(x^2+1)}\ dx$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\ dz\right| \le \frac{\pi R}{R(R^2-1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Per valutare l'integrale su C_ρ si osservi che, avendo $f(z)$ un polo semplice in $z = 0$, per $0 < |z| < 1$ si ha $f(z) = g(z) + z^{-1} \operatorname{Res}_{z=0} f(z)$ con $g(z)$ analitica in $|z| < 1$. Inoltre

$$\left|\int_{C_\rho} g(z)\ dz\right| \le \pi\rho\ M \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

$$\int_{C_\rho} \frac{1}{z}\ dz = \int_{-\pi}^0 \frac{1}{e^{i\theta}} ie^{i\theta} d\theta = -i\pi$$

e quindi

$$\int_{C_\rho} f(z)\ dz \xrightarrow{\rho\to 0} -i\pi \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -i\pi \left.\frac{e^{iz}}{z^2+1}\right|_{z=0} = -i\pi$$

In conclusione nel limite $\rho \to 0$ e $R \to \infty$ si ha

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x(x^2+1)}\ dx - i\pi = -i\pi e^{-1}$$

ovvero

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\ dx = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-1})$$