# METODI MATEMATICI DELLA FISICA
## A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

## Prova di recupero 17 settembre 2007

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| | | |
|---|---|---|
| in sostituzione delle prove in itinere (segnare) | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

Esercizio 1 Dimostrare le seguenti affermazioni, se vere, o fornire un controesempio, se false:
($a$) L'unione di una infinità numerabile di aperti è un aperto;
($b$) L'intersezione di una infinità numerabile di aperti è un aperto;
($c$) L'unione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso;
($d$) L'intersezione di una infinità numerabile di chiusi è un chiuso.

[punteggio 6]

---

($a$) Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi aperti e si consideri un generico punto $x \in \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Deve allora esistere almeno un $k_0$ tale che $x \in A_{k_0}$. Poiché $A_{k_0}$ è aperto per definizione $\exists\ \varepsilon > 0$ tale che $B(x, \varepsilon) \subset A_{k_0} \subset \cup_{k=1}^{\infty} A_k$ da cui segue che l'asserto.

($b$) Falso. Si consideri in $\mathbb{C}$ l'infinità numerabile di aperti $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = B(0, 1+1/k)$. Evidentemente si ha $\cap_{k=1}^{\infty} A_k = \overline{B}(0,1)$ che è un chiuso.

($c$) Falso. Si consideri in $\mathbb{C}$ l'infinità numerabile di chiusi $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ dove $A_k = \overline{B}(0, 1-1/k)$. Evidentemente si ha $\cup_{k=1}^{\infty} A_k = B(0,1)$ che è un aperto.

($d$) Vero. Sia $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ una infinità numerabile di insiemi chiusi. Per le leggi di de Morgan

$$\left( \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \right)^c = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k)^c .$$

In virtù del punto $a$) il complementare dell'intersezione degli $A_k$ è un aperto e quindi la loro intersezione è un chiuso.

Esercizio 2

Dire quanti rami distinti possiedono le seguenti funzioni e determinare il dominio di analiticità del ramo principale. Nel caso particolare $n = 17$, $m = 3$, $c = 1/\pi$, calcolare il valore del loro ramo principale nel punto $z = i$.

$$(a)\ \ z^n \qquad (b)\ \ z^{n/m} \qquad (c)\ \ z^c \qquad n, m \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

[punteggio 6]

---

$(a)$ La funzione $z^n$ è monodroma e intera essendo il prodotto di $n$ funzioni intere. Per $n = 17$, in $z = i$ essa vale

$$i^{17} = i^{16} i = (i^2)^8 i = (-1)^8 i = i.$$

$(b)$ Se $n$ è multiplo di $m$ si ricade nel caso $(a)$. Altrimenti la funzione $z^{n/m} = \exp((n/m) \log z)$ è polidroma con $m$ rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo. Per $n = 17$ e $m = 3$, in $z = i$ essa vale

$$\begin{aligned} i^{17/3} &= e^{(17/3)\log i} = e^{(17/3)(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{17\pi i/6} = e^{12\pi i/6} e^{5\pi i/6} \\ &= \cos(5\pi/6) + i\sin(5\pi/6) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

$(c)$ La funzione $z^c = \exp(c \log z)$ è polidroma con infiniti rami distinti. Il ramo principale, corrispondente al ramo principale di $\log z$, è una funzione analitica in tutto il piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo. Per $c = 1/\pi$, in $z = i$ essa vale

$$i^{1/\pi} = e^{(1/\pi)\log i} = e^{(1/\pi) i\pi/2} = e^{i/2} = \cos(1/2) + i\sin(1/2).$$

Esercizio 3 Determinare, ad ogni ordine, la serie di potenze definita dal rapporto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n\right)$$

e calcolarne il raggio di convergenza $R$.

[punteggio 5]

---

Nella comune regione di convergenza e supponendo che la somma della serie a denominatore non si annulli, il rapporto di due serie di potenze è ancora una serie di potenze data da

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \qquad d_n = \left(a_n - \sum_{k=0}^{n-1} d_k b_{n-k}\right) \frac{1}{b_0}.$$

Nel caso considerato in cui $a_n = 1$, $b_n = 2^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, l'equazione iterativiva per i coefficienti $d_n$ fornisce

$$\begin{aligned}
d_0 &= 1 \\
d_1 &= 1 - d_0 2^1 = 1 - 2 = -1 \\
d_2 &= 1 - d_0 2^2 - d_1 2^1 = 1 - 4 + 2 = -1 \\
d_3 &= 1 - d_0 2^3 - d_1 2^2 - d_2 2^1 = 1 - 8 + 4 + 2 = -1 \\
&\vdots \\
d_n &= 1 - \sum_{k=0}^{n-1} d_k 2^{n-k} = -2^n + \sum_{j=0}^{n-1} 2^j = -2^n + \frac{1 - 2^n}{1 - 2} = -1, \qquad n > 1.
\end{aligned}$$

Il raggio di convergenza $R$ è dato dalla formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \to \infty} |d_n|^{1/n} = 1$$

Alternativamente, si osservi che per $|z| < 1$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1/(1 - z)$ mentre per $|z| < 1/2$ vale $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n = 1/(1 - 2z)$. Pertanto

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right) / \left(\sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n\right) = 1 - z\frac{1}{1 - z} = 1 - z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} z^n$$

Tale sviluppo è valido per $|z| < 1$ e coincide con il risultato trovato in precedenza.
Si noti che il teorema sul rapporto di due serie di potenze assicura la convergenza della serie risultante all'interno del cerchio di raggio $R_{\text{th}} = \min\{R_1, R_2\}$, dove $R_1$ e $R_2$ sono i raggi di convergenza delle serie a numeratore e denominatore (supposte di medesimo centro). In generale, si avrà $R_{\text{th}} \leq R$ essendo $R$ l'effettivo raggio di convergenza. Nel presente esempio $R_1 = 1$, $R_2 = 1/2$ e $R_{\text{th}} < R$.

Esercizio 4 Detto $C$ il quadrato di vertici 1, $i$, $-1$, $-i$, dimostrare che

$$\left|\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^2} dz\right| \leq 8\sqrt{2}$$

[punteggio 5]

---

Il quadrato $C$ ha lati di lunghezza $d = \sqrt{2}$. Ogni punto di $C$ dista dall'origine non meno del raggio $r$ della circonferenza inscritta in $C$ e non più del raggio $R$ della circonferenza in cui $C$ è inscritto. Tale raggi valgono $r = d/2 = 1/\sqrt{2}$ e $R = 1$. Pertanto

$$\left|\frac{\sqrt{z}}{z^2}\right| = \frac{|z|^{1/2}}{|z|^2} \leq \frac{R^{1/2}}{r^2} = 2 \qquad \forall z \in C$$

Usando la disugualianza di Darboux

$$\left|\int_C f(z) dz\right| \leq M \ L$$

dove $M$ è una costante tale che $|f(z)| \leq M \ \forall z \in C$ e $L$ è la lunghezza del cammino $C$, si ha quindi per $M = 2$ e $L = 4\sqrt{2}$

$$\left|\int_C \frac{\sqrt{z}}{z^2} dz\right| \leq 8\sqrt{2}$$

Nota bene: per un errore tipografico nel testo compariva la funzione integranda $1/z^2$ anziché $\sqrt{z}/z^2$. La maggiorazione continua a valere anche se il risultato dell'integrale di $1/z^2$ è banalmente 0 come alcuni hanno fatto notare.

Esercizio 5

Assumendo per la funzione integranda il ramo principale, calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{C_R} z^{1/3}\, dz,$$

dove $C_R$ è la circonferenza i raggio $R$ centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario.

[punteggio 6]

---

Si osservi che il ramo principale di $z^{1/3} = \exp[(1/3)\log z]$ è una funzione analitica sul cammino $C_{R,\varepsilon} = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ -\pi+\varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\}$ e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{3}{4}z^{4/3}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} z^{1/3}\, dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{R,\varepsilon}} z^{1/3}\, dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4} z^{4/3}\Big]_{z=Re^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4} R^{4/3}\left(e^{i\frac{4}{3}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{4}{3}(-\pi+\varepsilon)}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{3}{4} R^{4/3}\ 2i\sin\left[\frac{4}{3}(\pi-\varepsilon)\right] \\
&= \frac{3}{4}R^{4/3}\ 2i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) \\
&= -i\frac{3\sqrt{3}}{4}R^{4/3}
\end{aligned}$$

Esercizio 6

Enunciare e dimostrare il teorema dei residui. Nota bene: verrà valutato in modo particolare il rigore espositivo.

[punteggio 5]

*Sia $f(z)$ analitica su e all'interno di $C$ cammino chiuso semplice orientato in verso positivo ad eccezione di un numero finito di punti singolari (isolati) $z_k \in \mathrm{Int}(C)$, $k = 1, \ldots, n$, allora*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

*Dimostrazione.* Siano $C_k$, $k = 1, \ldots, n$, $n$ circonferenze orientate positivamente di centro $z_k$ e di raggio sufficientemente piccolo affinché esse siano tutte interne a $C$ e a due a due disgiunte. La regione di piano complesso interna a $C$ ed esterna ai cammini $C_k$ è una regione molteplicemente connessa in cui $f(z)$ è analitica. Per il teorema di Cauchy-Goursat si ha allora

$$\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)dz = 0.$$

Per la definizione di residuo vale

$$\int_{C_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

e quindi l'asserto. ∎

COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

Prova di recupero 17 settembre 2007

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |

<u>Esercizio 1</u> Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(\exp(\cos\theta + i\sin\theta))d\theta$$

[punteggio 10]

---

Posto $z = e^{i\theta}$ e quindi $dz = ie^{i\theta}d\theta$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \sin(\exp(\cos\theta + i\sin\theta))d\theta = \int_C \sin(\exp(z))\frac{dz}{iz}$$

dove $C = \{z(\theta) = e^{i\theta},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$. La funzione integranda che appare nell'integrale sul cammino $C$ è analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del polo semplice in $z = 0$. Per il teorema dei residui si ha

$$\int_C \sin(\exp(z))\frac{dz}{iz} = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{\sin(\exp(z))}{iz} = 2\pi i\frac{\sin(\exp(0))}{i} = 2\pi\sin(1).$$

Esercizio 2

Dimostrare che gli zeri delle funzioni analitiche sono isolati, ovvero
*Sia* $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ *analitica in* $z_0$ *con* $f(z_0) = 0$ *ma non identicamente nulla in ogni intorno di* $z_0$*. Allora,* $\exists\ \delta > 0$ *tale che* $f(z) \neq 0\ \forall z \in A(z_0; 0, \delta)$.

[punteggio 11]

Non tutte le derivate di $f(z)$ calcolate in $z_0$ possono essere nulle. Infatti se fosse $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n = 0, 1, 2, \ldots$, allora tutti coefficienti della serie di Taylor che rappresenta $f(z)$ in un intorno di $z_0$ sarebbero nulli e $f(z)$ sarebbe identicamente nulla in tale intorno, contrariamente alle ipotesi. Pertanto $\exists\ m$ tale che $f^{(n)}(z_0) = 0$ per $n = 0, 1, \ldots, m - 1$ e $f^{(m)}(z_0) \neq 0$. Ne segue che $f(z)$ ha uno zero di ordine $m$ in $z_0$ ed è possibile scrivere

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in $z_0$. Poiché $g(z)$ è continua e non nulla in $z_0$ allora $g(z) \neq 0$ in un qualche intorno di $z_0$. Infatti, per definizione di continuità, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $|g(z) - g(z_0)| < \varepsilon\ \forall z \in B(z_0, \delta)$. Scelto $\varepsilon = |g(z_0)|/2 > 0$, se fosse $g(z) = 0$ per qualche $z \in B(z_0, \delta)$ si otterrebbe la contraddizione $|0 - g(z_0)| < |g(z_0)|/2$. In conclusione, $f(z) \neq 0\ \forall z \in B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\} = A(z_0; 0, \delta)$. ■

Esercizio 3 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}\, dx \qquad -1 < a < 1$$

[punteggio 12]

Si ponga

$$f(z) = \frac{z^a}{z^2+1} = \frac{e^{a \log z}}{z^2+1} \qquad |z| > 0 \qquad 0 < \arg z < 2\pi$$

Nel dominio specificato $f(z)$ è analitica ovunque ad eccezione dei due poli semplici in $z = \pm i$ dove ha residui

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \left.\frac{e^{a \log z}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{e^{a(\ln 1 + i\pi/2)}}{i+i} = \frac{e^{i\pi a/2}}{2i}$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \left.\frac{e^{a \log z}}{z-i}\right|_{z=-i} = \frac{e^{a(\ln 1 + i3\pi/2)}}{-i-i} = \frac{e^{i3\pi a/2}}{-2i}$$

L'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso $C = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\rho$ dove $L_1 = \{z(x) = x + i0,\ \rho \le x \le R\}$, $C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$, $L_2 = \{z(x) = x - i0,\ R \ge x \ge \rho\}$ e $C_\rho = \{z(\theta) = \rho e^{i\theta},\ 2\pi \ge \theta \ge 0\}$ vale quindi, per $R > 1$ e $\rho < 1$,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\, dz &= \int_{L_1} f(z)\, dz + \int_{C_R} f(z)\, dz + \int_{L_2} f(z)\, dz + \int_{C_\rho} f(z)\, dz \\
&= 2\pi i \left[\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-i} f(z)\right] \\
&= \pi \left(e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2}\right)
\end{aligned}$$

Per i singoli integrali si ha

$$\int_{L_1} f(z)\, dz = \int_\rho^R \frac{e^{a(\ln x + i0)}}{(xe^{i0})^2+1} e^{i0} dx = \int_\rho^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2+1} dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\, dz = \int_R^\rho \frac{e^{a(\ln x + i2\pi)}}{(xe^{i2\pi})^2+1} e^{i2\pi} dx = -e^{i2\pi a} \int_\rho^R \frac{e^{a \ln x}}{x^2+1} dx$$

$$\left|\int_{C_R} f(z)\, dz\right| \le \frac{e^{a \ln R}}{R^2-1}\, 2\pi R = \frac{2\pi R^{a+1}}{R^2-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{se } a < 1$$

$$\left|\int_{C_\rho} f(z)\, dz\right| \le \frac{e^{a \ln \rho}}{1-\rho^2}\, 2\pi \rho = \frac{2\pi \rho^{a+1}}{1-\rho^2} \xrightarrow{\rho\to 0} 0 \qquad \text{se } -1 < a$$

In conclusione, prendendo i limiti $R \to \infty$ e $\rho \to 0$ per $-1 < a < 1$ si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^a}{x^2+1}\, dx &= \frac{\pi\left(e^{i\pi a/2} - e^{i3\pi a/2}\right)}{1 - e^{i2\pi a}} = \frac{\pi e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a/2} - e^{i\pi a/2}\right)}{e^{i\pi a}\left(e^{-i\pi a} - e^{i\pi a}\right)} \\
&= \frac{\pi \sin(\pi a/2)}{\sin(\pi a)} = \frac{\pi/2}{\cos(\pi a/2)}
\end{aligned}$$