METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova finale 18 settembre 2003

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinire (segnare)	1	2	3	4

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n^3} z^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \sin(in) z^n$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = 2^n/n^3$ e si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{2^n}{n^3} \frac{(n+1)^3}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 1/2$.

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \sin(in) = \frac{e^{-n} - e^n}{2i}$$

e si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{|e^{-n} - e^n|}{|e^{-(n+1)} - e^{n+1}|} = \frac{|e^{-2n} - 1|}{|e^{-2n-1} - e|} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e}$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 1/e$.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cosh z = \frac{1}{2}$$

[punteggio 3]

L'equazione da risolvere è

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} = \frac{1}{2}$$

cioé

$$(e^z)^2 - e^z + 1 = 0$$

che fornisce

$$e^z = \frac{1 + \sqrt{1-4}}{2} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3} + i2\pi k} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z_k = i\pi\left(2k \pm \frac{1}{3}\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Esercizio 3 Determinare il modulo del valore principale di

$$(1+i)^{2-i}$$

[punteggio 3]

Utilizzando $z^c = \exp(c \log z)$ e $\mathrm{Log} z = \log|z| + i\mathrm{Arg} z$ con $-\pi < \mathrm{Arg} z \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
(1+i)^{2-i} &= \exp\left[(2-i)\mathrm{Log}(1+i)\right] \\
&= \exp\left[(2-i)\mathrm{Log}\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] \\
&= \exp\left[(2-i)\left(\frac{1}{2}\log 2 + i\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \exp\left[\log 2 + \frac{\pi}{4} + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\log 2\right)\right]
\end{aligned}$$

e quindi

$$\left|(1+i)^{2-i}\right| = \exp\left(\log 2 + \frac{\pi}{4}\right) = 2e^{\frac{\pi}{4}}$$

Esercizio 4 Determinare e disegnare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni (usare il ramo principale se necessario)

$$(a)\ \log\left[(2-z)^2\right] \qquad (b)\ z^z$$

[punteggio 6]

(a) La diramazione principale di $\log z$ è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$(2-z)^2 = -a \qquad a \geq 0$$

ovvero nei punti $z = 2 \pm i\sqrt{a}$, $a \geq 0$, cioé lungo l'asse $z = 2$.

(b) La funzione z^z è definita per mezzo dell'equazione

$$z^z = \exp\left(z \log z\right)$$

Poiché la funzione esponenziale è analitica ovunque, il dominio di analiticità della diramazione principale di z^z coincide con quello della diramazione principale di $\log z$, ovvero l'intero piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine.

Esercizio 5 Calcolare lo sviluppo in serie di Laurent convergente nell'anello di centro $z = 0$ e raggi 1 e 2 per la funzione

$$f(z) = -\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

Scrivere esplicitamente i coefficienti c_{-3}, c_0 e c_4.

[punteggio 4]

Nel dominio $1 < |z| < 2$, è opportuno riscrivere la funzione $f(z)$ come

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-2} \\ &= \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-(1/z)} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(z/2)} \end{aligned}$$

Poiché in questo dominio risulta $|1/z| < 1$ e $|z/2| < 1$, si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$$

Ugualiando questa espressione a

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

si ottiene

$$c_{-3} = 1 \qquad c_0 = \frac{1}{2} \qquad c_4 = \frac{1}{32}$$

Esercizio 6 Dopo aver determinato la natura della singolarità, determinare il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(e^z - 1)\sin z}$$

in $z = 0$.

[punteggio 3]

Espandendo in serie di Taylor le funzioni esponenziale e seno, si ha

$$f(z) = \frac{1}{\left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots\right)\left(z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} + \ldots\right)} = \frac{\phi(z)}{z^2}$$

con

$$\phi(z) = \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \ldots\right)}$$

analitica e non nulla in $z = 0$. La funzione $f(z)$ ha dunque un polo doppio in $z = 0$ e

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}[f(z)]_{z=0} &= \phi'(0) \\
&= -\frac{\frac{1}{2} + \frac{z}{3} + \ldots}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)^2\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \ldots\right)} \\
&\quad \left. - \frac{-\frac{z}{3} + \frac{z^3}{30} + \ldots}{\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{6} + \ldots\right)\left(1 - \frac{z^2}{6} + \frac{z^4}{120} + \ldots\right)^2}\right|_{z=0} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Esercizio 7 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx$$

[punteggio 4]

La funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)(z^2+9)} = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-3i)(z+3i)}$$

è analitica ovunque ad eccezione dei quattro poli semplici in $\pm i$ e $\pm 3i$. L'integrale di $f(z)$ sul cammino chiuso $C = L_R \cup C_R$ dove $L_R \equiv \{z(x) = x,\ -R \le x \le R\}$ e $C_R \equiv \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\}$ vale quindi, per $R > 3$,

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\, dz &= \int_{-R}^{R} \frac{xe^{ix}}{x^2+4}\, dx + \int_{C_R} f(z)\, dz \\
&= 2\pi i \left(\mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=i} + \mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=3i}\right) \\
&= 2\pi i \left(-\frac{1}{16i} + \frac{3}{16i}\right) \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

Poiché

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)\, dz = 0$$

prendendo il limite $R \to \infty$ dell'integrale su C si ottiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+9)}\, dx = \frac{\pi}{4}$$

Esercizio 8 Enunciare e dimostrare il teorema di Liouville.

[punteggio 4]

Teorema 1 (Liouville). *Se $f(z)$ è intera e limitata nel piano complesso, allora $f(z)$ è costante su tutto il piano.*

Poiché per ipotesi la funzione $f(z)$ è analitica su tutto il piano complesso, per ogni $z \in \mathbb{C}$ vale la formula integrale di Cauchy

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(s)}{(s-z)^2} \, ds$$

dove C_R è una ciconferenza centrata in z e di raggio R arbitrario. D'altro canto poiché esiste $M > 0$ tale che $|f(z)| \leq M$ per ogni $z \in \mathbb{C}$, si ottiene

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} 2\pi R = \frac{M}{R}$$

Dalla arbitrarietà di R segue che $f'(z) = 0$ per ogni $z \in \mathbb{C}$. Dunque $f(z)$ è costante sull'intero piano complesso.