METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2003/2004 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 19 marzo 2004

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1   Sia $f(z)$ analitica su e dentro il cammino chiuso semplice C e sia z_0 un punto non appartenente a C. Dimostrare che

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = \int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz$$

[punteggio 5]

Se z_0 è interno a C allora valgono le formule integrali di Cauchy

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 2\pi i f'(z_0) \qquad \int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = 2\pi i f'(z_0)$$

da cui l'asserto.
Se z_0 è esterno a C allora le funzioni

$$\frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \qquad \frac{f'(z)}{z-z_0}$$

sono analitiche su e dentro C e per il teorema di Cauchy-Goursat

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}\,dz = 0 \qquad \int_C \frac{f'(z)}{z-z_0}\,dz = 0$$

e quindi ancora l'ugualianza tra i due integrali.

Esercizio 2 Ciascuna delle seguenti funzioni ha una singolarità in $z = 0$. Classificarne la natura e, se il caso, calcolare il corrispondente residuo.

$$(a)\quad \frac{\sqrt{z}}{z} \qquad (b)\quad \frac{z}{1-\cos z} \qquad (c)\quad \left(z^3+3\right)\exp\left(z^{-1}\right)$$

[punteggio 6]

(a) Indipendentemente dal ramo scelto, la funzione polidroma

$$\frac{\sqrt{z}}{z} = z^{-1/2} = e^{-\frac{1}{2}\log z}$$

ha in $z = 0$ una singolarità non isolata (punto di diramazione). Non esiste pertanto una regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ dove sia possibile svilupparla in serie di Laurent.

(b) La funzione $1 - \cos z$ è intera e in $z = 0$ ha uno zero doppio isolato

$$1-\cos z = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k} = \frac{z^2}{2!}\left(1 - \frac{2!}{4!}z^2 + \frac{2!}{6!}z^4 + \ldots\right)$$

Pertanto la funzione $z/(1-\cos z)$ ha in $z = 0$ un polo semplice. In una opportuna regione anulare $0 < |z| < \varepsilon$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{z}{1-\cos z} &= \frac{2!}{z}\frac{1}{1+\left(-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\ldots\right)} \\
&= \frac{2!}{z}\left[1-\left(-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\ldots\right)+\left(-\frac{2!}{4!}z^2+\frac{2!}{6!}z^4+\ldots\right)^2+\ldots\right] \\
&= \frac{2!}{z}+\frac{(2!)^2}{4!}z+\mathcal{O}\left(z^3\right)
\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{z}{1-\cos z} = 2$$

(c) In questo caso per $0 < |z| < \infty$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\left(z^3+3\right)e^{1/z} &= \left(z^3+3\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}z^{-k+3}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3}{k!}z^{-k} \\
&= z^3+z^2+\frac{1}{2}z+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(n+3)!}+\frac{3}{n!}\right)z^{-n}
\end{aligned}$$

Quindi $z = 0$ è una singolarità essenziale di $\left(z^3+3\right)e^{1/z}$ e si ha

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\left(z^3+3\right)e^{1/z} = \frac{1}{(1+3)!}+\frac{3}{1!} = \frac{1}{24}+3 = \frac{73}{24}$$

Esercizio 3 Sviluppare in serie di Laurent intorno a $z_0 = 0$ nelle due regioni anulari $0 < |z| < 1$ e $1 < |z| < \infty$ la funzione

$$f(z) = \frac{1}{[z(1-z)]^2}$$

[punteggio 6]

Per $0 < |z| < 1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\frac{1}{1-z} = \frac{1}{z^2}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{z^2}\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-3} = \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3) z^n \\ &= \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + 3 + 4z + 5z^2 + \ldots \end{aligned}$$

Per $1 < |z| < \infty$ ponendo $w = z^{-1}$ e notando che $|w| < 1$, possiamo scrivere

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{w^4}{(1+w)^2} = w^4 \frac{d}{dw}\frac{1}{1-w} = w^4 \frac{d}{dw}\sum_{k=0}^{\infty} w^k \\ &= w^4 \sum_{k=1}^{\infty} k w^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k w^{k+3} = \sum_{n=4}^{\infty} (n-3) w^n \\ &= w^4 + 2w^5 + 3w^6 + 4w^7 + 5w^8 + \ldots \\ &= \frac{1}{z^4} + \frac{2}{z^5} + \frac{3}{z^6} + \frac{4}{z^7} + \frac{5}{z^8} + \ldots \end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il valore principale di Cauchy del seguente integrale

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x-b)^2 + c^2}\, dx \qquad a > 0 \;\; b > 0 \;\; c > 0$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = z/[(z-b)^2 + c^2]$ e detto $C = L \cup C_R$ il cammino di integrazione chiuso dove $L = \{z(x) = x, \; -R \leq x \leq R\}$ e $C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta}, \; 0 \leq \theta \leq \pi\}$, per $R > \sqrt{b^2 + c^2}$ la funzione $f(z)e^{iaz}$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = b + ic$. Per il teorema dei residui

$$\int_L f(z)e^{iaz}\, dz + \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=b+ic} f(z)e^{iaz} = \frac{\pi}{c} e^{-ac}(b+ic)e^{iab}$$

Per $z \in C_R$, risulta $|f(z)| \leq R/[(R-b)^2 - c^2]$ infinitesimo per $R \to \infty$ e quindi per il lemma di Jordan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}\, dz = 0$$

Inoltre

$$\int_L f(z)e^{iaz}\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{(x-b)^2 + c^2}\, dx$$

quindi nel limite $R \to \infty$ otteniamo

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{+R} \frac{xe^{iax}}{(x-b)^2 + c^2}\, dx = \frac{\pi}{c} e^{-ac}(b + ic)e^{iab}$$

da cui prendendo la parte immaginaria

$$\text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{(x-b)^2 + c^2}\, dx = \frac{\pi}{c} e^{-ac} \left[b \sin(ab) + c \cos(ab)\right]$$

Esercizio 5 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \; d\theta$$

[punteggio 5]

Ponendo $e^{i\theta} = z$, si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \; d\theta = \int_C \left(\frac{z + z^{-1}}{2}\right)^2 \frac{dz}{iz} = \int_C \frac{\left(z^2+1\right)^2}{4iz^3} \; dz$$

dove $C = \{z(\theta) = e^{i\theta}, \; 0 \le \theta \le 2\pi\}$. La funzione da integrare

$$f(z) = \frac{\left(z^2+1\right)^2}{4iz^3}$$

è analitica su e dentro C ad eccezione del polo di ordine 3 in $z = 0$. Per il teorema dei residui

$$\int_C f(z) \; dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2\pi i \; \frac{\phi''(0)}{2!}$$

dove $\phi(z) = \left(z^2+1\right)^2 /4i$. Poiché $\phi''(z) = \left(3z^2+1\right)/i$ si ha

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta \; d\theta = 2\pi i \; \frac{\phi''(0)}{2!} = 2\pi i \; \frac{1}{2i} = \pi$$

Esercizio 6 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$$

[punteggio 6]

Scelta la funzione

$$f(z) = \frac{e^{\frac{1}{2}\log z}}{z^2+1}$$

$$\log z = \ln|z| + i\arg z \qquad |z|>0 \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

e detto $C = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\rho$ il cammino di integrazione chiuso dove

$$L_1 = \{z(x) = x,\ \rho \le x \le R\} \qquad C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\}$$
$$L_2 = \{z(x) = xe^{i\pi},\ R \ge x \ge \rho\} \qquad C_\rho = \{z(\theta) = \rho e^{i\theta},\ \pi \ge \theta \ge 0\}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z=i$ per $R>1$ e $\rho<1$ si ha

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i\,\frac{e^{\frac{1}{2}(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})}}{i+i} = \pi e^{i\frac{\pi}{4}}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\,dz = \int_\rho^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\,dz = \int_R^\rho \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln x + i\pi)}}{x^2+1}\,e^{i\pi}dx = i\int_\rho^R \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_{C_R} f(z)\,dz = \int_0^\pi \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln R + i\theta)}}{R^2e^{2i\theta}+1}\,iRe^{i\theta}d\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{C_\rho} f(z)\,dz = \int_\pi^0 \frac{e^{\frac{1}{2}(\ln\rho + i\theta)}}{\rho^2e^{2i\theta}+1}\,i\rho e^{i\theta}d\theta \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

e quindi nel limite $\rho \to 0$ e $R \to \infty$ otteniamo

$$(1+i)\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \pi\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{2}}(1+i)$$

e quindi

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$