METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 20 febbraio 2003

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz$$

dove C è il cammino di integrazione, percorso in verso antiorario, costituito dal semicerchio $|z| = 2$ con $\mathrm{Im} z > 0$ e dal segmento dell'asse reale compreso tra $z = -2$ e $z = 2$.

[punteggio 8]

Si ha

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz = \int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}\, dz + \int_{C_2} \frac{z}{\bar{z}}\, dz$$

dove $C_1 \equiv \{z(t) = 2\exp(it),\ 0 \le t \le \pi\}$ e $C_2 \equiv \{z(t) = t,\ \ -2 \le t \le 2\}$. In base alla definizione di integrale

$$\int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}\, dz = \int_0^\pi \frac{2e^{it}}{2e^{-it}} i2e^{it}\, dt = \int_0^\pi 2ie^{i3t} dt = -\frac{4}{3}$$

$$\int_{C_2} \frac{z}{\bar{z}}\, dz = \int_{-2}^2 \frac{t}{t} 1\, dt = \int_{-2}^2 dt = 4$$

In conclusione

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}\, dz = -\frac{4}{3} + 4 = \frac{8}{3}$$

Esercizio 2 Calcolare l'integrale

$$\int_C z^{-1} \log z \; dz$$

dove $C \equiv \{z(\theta) = \exp(i\theta),\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ e per il logaritmo viene scelto il ramo $\log z = \ln |z| + i\theta$, con $0 < \theta < 2\pi$.

[punteggio 8]

La funzione $z^{-1} \log z$ è continua su C ad eccezione del punto $z = 1$ corrispondente all'asse di diramazione scelto per il logaritmo. L'integrale in questione dunque esiste e il suo valore è dato da

$$\begin{aligned}
\int_C z^{-1} \log z \; dz &= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} \left(\ln 1 + i\theta\right) e^{i\theta} i \; d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} i^2 \theta \; d\theta \\
&= -2\pi^2
\end{aligned}$$

Alternativamente, si osservi che ad eccezione dei punti dell'asse di diramazione

$$z^{-1} \log z = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2} \log^2 z \right)$$

Posto allora $C_\alpha \equiv \{z(\theta) = \exp(i\theta),\ \alpha \le \theta \le 2\pi - \alpha\}$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_C z^{-1} \log z \; dz &= \lim_{\alpha \to 0} \int_{C_\alpha} z^{-1} \log z \; dz \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2} \log^2 z \Big|_{z = e^{i\alpha}}^{z = e^{i(2\pi - \alpha)}} \\
&= \lim_{\alpha \to 0} \frac{1}{2} \left(i^2 (2\pi - \alpha)^2 - i^2 \alpha^2 \right) \\
&= -2\pi^2
\end{aligned}$$

Esercizio 3 Calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz$$

dove C è un cammino di integrazione chiuso percorso in verso positivo che
(a) contiene il punto $z=0$ ma non contiene il punto $z=1$,
(b) contiene il punto $z=1$ ma non contiene il punto $z=0$,
(c) contiene entrambi i punti $z=0$ e $z=1$.

[punteggio 12]

(a) La funzione $\exp(z)/(1-z)^3$ è analitica ovunque all'interno e sul cammino C. Dalla formula integrale di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz &= \int_C \frac{\exp(z)/(1-z)^3}{z-0}\, dz \\ &= 2\pi i \left.\frac{e^z}{(1-z)^3}\right|_{z=0} \\ &= 2\pi i\end{aligned}$$

(b) La funzione $\exp(z)/z$ è analitica ovunque all'interno e sul cammino C. Dalla derivata seconda della formula integrale di Cauchy si ha

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz &= -\int_C \frac{\exp(z)/z}{(z-1)^3}\, dz \\ &= -\frac{2\pi i}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left.\left(\frac{e^z}{z}\right)\right|_{z=1} \\ &= -\pi i \left.\left(\frac{e^z}{z} - 2\frac{e^z}{z^2} + 2\frac{e^z}{z^3}\right)\right|_{z=1} \\ &= -e\pi i\end{aligned}$$

(c) Si consideri un arco che congiungendo due punti del cammino C individui due cammini chiusi C_0 e C_1, contenenti rispettivamente i punti $z=0$ e $z=1$. Percorrendo C_0 e C_1 in verso positivo per quanto detto ai punti (a) e (b) si ha

$$\begin{aligned}\int_C \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz &= \int_{C_0} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz + \int_{C_1} \frac{e^z}{z(1-z)^3}\, dz \\ &= 2\pi i\left(1-\frac{e}{2}\right)\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare l'integrale

$$\int_C \frac{z}{z^4-1}\, dz$$

dove C è il l'esagono regolare, inscritto nel cerchio di raggio $a > 1$ di centro $z = a$, avente due lati paralleli all'asse reale e percorso in verso antiorario.

[punteggio 6]

Il polinomio a denominatore della funzione integranda può essere fattorizzato come

$$z^4 - 1 = (z^2-1)(z^2+1) = (z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$$

Dalla formula integrale di Cauchy si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_C \frac{z}{z^4-1}\, dz &= \int_C \frac{z/[(z+1)(z^2+1)]}{z-1}\, dz \\ &= 2\pi i \left.\frac{z}{(z+1)(z^2+1)}\right|_{z=1} \\ &= \frac{\pi i}{2}\end{aligned}$$

Esercizio 5 Determinare la posizione e il valore del massimo di $|\sinh z|$ nella regione $R \equiv \{z = x + iy,\ 0 \leq x \leq 3,\ 0 \leq y \leq \pi\}$.

[punteggio 7]

Poiché $f(z) = \sinh z$ è continua in R e analitica nel suo interno, per il teorema del massimo modulo $|f(z)|$ ha massimo sul bordo di R. Ricordando che

$$|\sinh(z)|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$$

e osservando che $\sinh^2 x$ è monotona crescente e $\sin^2 y$ ha massimi per $y = \pi/2 + n\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, il massimo di $|f(z)|$ in R viene raggiunto nel punto $z = 3 + i\pi/2$ e vale

$$|\sinh(3 + i\pi/2)| = \sqrt{\sinh^2 3 + 1} = \cosh 3$$

Esercizio 6 Si consideri la condizione

$$\int_C f(z)\ dz = 0$$

dove C è il cammino di integrazione $C \equiv \{z(t) = \exp(it),\ 0 \le t \le 2\pi\}$. È possibile soddisfare tale condizione con una $f(z)$ non analitica su e/o all'interno di C? Rispondere giustificando brevemente e, eventualmente, fornire un esempio.

[punteggio 4]

Le funzioni analitiche devono avere integrale nullo su *ogni* cammino. Per il cammino scelto, si consideri ad esempio $f(z) = |z|^2$ non analitica ovunque:

$$\int_C |z|^2 dz = \int_0^{2\pi} 1\ e^{it} i\ dt = e^{it}\Big]_0^{2\pi} = 0$$