METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2003/2004 – Prof. C. Presilla

Prova di recupero 20 settembre 2004

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2	3

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Esercizio 1 Determinare $a \in \mathbb{R}^+$ tale che si abbia

$$\left|\mathrm{Re}\left(i + 2\overline{z} + z^2\right)\right| < 3 \qquad \text{per } |z| < a$$

[punteggio 3]

Risulta

$$\begin{aligned}
\left|\mathrm{Re}\left(i + 2\overline{z} + z^2\right)\right| &= \left|\mathrm{Re}\left(2\overline{z} + z^2\right)\right| \\
&\leq \left|2\overline{z} + z^2\right| \\
&\leq \left|2\overline{z}\right| + \left|z^2\right| \\
&= 2\left|z\right| + \left|z\right|^2
\end{aligned}$$

Dunque, per avere $\left|\mathrm{Re}\left(i + 2\overline{z} + z^2\right)\right| < 3$ è sufficiente che sia

$$2\left|z\right| + \left|z\right|^2 < 3.$$

Questa disugualianza è soddisfatta per

$$-3 < |z| < 1$$

pertanto $a = 1$.

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a)\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)^3} z^n \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+n^6\right) z^{n^2}$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = 3^n/(n+1)^3$. Inoltre

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{3^n}{(n+1)^3}\frac{(n+2)^3}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^3 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{3}.$$

Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{1}{3}.$$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} 1+n^3 & n = k^2, \quad k = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{aligned} R^{-1} &= \limsup_{m\to\infty} |a_m|^{1/m} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geq m} \left\{|a_n|^{1/n}\right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup_{k:\ k^2\geq m} \left\{(1+k^6)^{1/k^2}\right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} (1+k_m^6)^{1/k_m^2} \\ &= 1, \end{aligned}$$

dove k_m è il più piccolo intero k tale che $k^2 \geq m$. In conclusione, $R = 1$.

Esercizio 3 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cosh z + e^z = 2 \qquad z \in \mathbb{C}$$

[punteggio 3]

Si ha

$$\frac{e^z + e^{-z}}{2} + e^z = 2$$

ovvero

$$3\,(e^z)^2 - 4e^z + 1 = 0$$

che ha soluzioni

$$e^z = \frac{2 \pm 1}{3}$$

Dalla soluzione $e^z = 1$ si ha

$$z = \log 1 = i2\pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Dalla soluzione $e^z = 1/3$ si ottiene invece

$$z = \log \frac{1}{3} = -\ln 3 + i2\pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Esercizio 4 Calcolare il valore dell'integrale

$$\int_{C_R} z^{4/3}\ dz,$$

dove $C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ \ -\pi \le \theta \le \pi\}$, assumendo per la funzione integranda il ramo principale.

[punteggio 4]

Si osservi che il ramo principale di $z^{4/3}$ è una funzione analitica sul cammino $C_{R,\varepsilon} = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ -\pi + \varepsilon \le \theta \le \pi - \varepsilon\}$ e ivi ammette come primitiva il ramo principale di $\frac{3}{7}z^{7/3}$. Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} z^{4/3}\ dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{R,\varepsilon}} z^{4/3}\ dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{7}z^{7/3}\Big]_{z=Re^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{7}R^{7/3}\left(e^{i\frac{7}{3}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{7}{3}(-\pi+\varepsilon)}\right) \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{3}{7}R^{7/3}\ 2i\sin\left[\frac{7}{3}(\pi-\varepsilon)\right] \\
&= \frac{3}{7}R^{7/3}\ 2i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= i\frac{3\sqrt{3}}{7}R^{7/3}
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Assumendo per il logaritmo il ramo principale, determinare la regione di analiticità della funzione

$$(z+1)\log\left(1+z^2\right)$$

e quindi svilupparla in serie di Taylor intorno a $z=0$. Determinare il raggio di convergenza della serie ottenuta.

[punteggio 4]

Il ramo principale di $\log z$ è una funzione analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano

$$1+z^2=-t \qquad t\geq 0$$

ovvero

$$z=\pm i\sqrt{1+t} \qquad t\geq 0$$

Lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z=0$ esiste all'interno del massimo cerchio di analiticità centrato nell'origine: questo ha raggio 1. Utilizzando lo sviluppo notevole ($|z|<1$)

$$\begin{aligned}
\log(1+z) &= z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^n
\end{aligned}$$

si ha

$$\begin{aligned}
(z+1)\log\left(1+z^2\right) &= (z+1)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^{2n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^{2n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}z^{2n} \\
&= z^2+z^3-\frac{z^4}{2}-\frac{z^5}{2}+\frac{z^6}{3}+\frac{z^7}{3}-\frac{z^8}{4}-\frac{z^9}{4}+\dots \\
&= \sum_{k=2}^{\infty}a_k z^k
\end{aligned}$$

dove

$$a_k=\begin{cases}\frac{2(-1)^{k/2+1}}{k} & \text{per } k \text{ pari}\\ \frac{2(-1)^{(k+1)/2}}{k-1} & \text{per } k \text{ dispari}\end{cases}$$

Il raggio di convergenza di questa serie è

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1$$

Esercizio 6 Determinare la natura della singolarità isolata in $z = 3$ delle seguenti funzioni e calcolarne il corrispondente residuo

$$(a) \quad z \sin\left(\frac{1}{z-3}\right) \qquad (b) \quad \frac{z}{(z-3)\sin(z-3)}$$

[punteggio 6]

(a) Utilizzando lo sviluppo notevole $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ si ha

$$\begin{aligned}
z \sin\left(\frac{1}{z-3}\right) &= [(z-3)+3] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-3)^{2n+1}} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-3)^{2n}} + 3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(z-3)^{2n+1}} \\
&= 1 + \frac{3}{z-3} - \frac{1}{3!(z-3)^2} - \frac{3}{3!(z-3)^3} + \dots
\end{aligned}$$

Si tratta dunque di una singolarità isolata essenziale con

$$\operatorname*{Res}_{z=3} z \sin\left(\frac{1}{z-3}\right) = 3$$

(b) In questo caso

$$\begin{aligned}
\frac{z}{(z-3)\sin(z-3)} &= \frac{z}{(z-3)\left((z-3) - \frac{(z-3)^3}{6} + \frac{(z-3)^5}{120} + \dots\right)} \\
&= \frac{(z-3)+3}{(z-3)^2 \left[1 - \left(\frac{(z-3)^2}{6} - \frac{(z-3)^4}{120} + \dots\right)\right]} \\
&= \frac{(z-3)+3}{(z-3)^2} \left[1 + \left(\frac{(z-3)^2}{6} + \dots\right) + \left(\frac{(z-3)^2}{6} + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{3}{(z-3)^2} + \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}(z-3) + \frac{7}{120}(z-3)^2 + \dots
\end{aligned}$$

La singolarità isolata in $z = 3$ è in questo caso un polo doppio e

$$\operatorname*{Res}_{z=3} \frac{z}{(z-3)\sin(z-3)} = 1$$

Esercizio 7 Dimostrare il seguente

Teorema 1. *Sia C un qualsiasi cammino interno al cerchio di convergenza della serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = S(z)$ e sia $g(z)$ una funzione continua su C. Allora*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n dz = \int_C g(z)S(z)dz$$

[punteggio 4]

Dimostrazione. Si noti che $g(z)$ e $S(z)$ sono funzioni continue su C. Pertanto l'integrale su C del prodotto $g(z)S(z)$ esiste. Inoltre, poiché

$$g(z)S(z) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(z)(z-z_0)^n + g(z)\rho_N(z),$$

dove $\rho_N(z)$ è il resto N-esimo della serie assegnata, e gli integrali su C della somma finita esistono, deve anche esistere l'integrale su C di $g(z)\rho_N(z)$. Possiamo dunque scrivere

$$\int_C g(z)S(z)dz = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \int_C g(z)(z-z_0)^n dz + \int_C g(z)\rho_N(z)dz$$

Sia M il massimo valore di $|g(z)|$ su C e L la lunghezza di C. Grazie all'uniforme convergenza delle serie di potenze, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un N_ε tale che $|\rho_N(z)| < \varepsilon \ \forall z \in C$ purché $N > N_\varepsilon$. Poiché N_ε è indipendente da z, otteniamo

$$\left| \int_C g(z)\rho_N(z)dz \right| < M\varepsilon L \qquad \text{per } N > N_\varepsilon$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che

$$\lim_{N\to\infty} \int_C g(z)\rho_N(z)dz = 0$$

e quindi l'asserto. □

Esercizio 8 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\ dx$$

[punteggio 4]

Posto

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2+4} \qquad \log z = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

e detto $C = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\rho$ il cammino chiuso di integrazione con

$$\begin{array}{cc} L_1 = \{z(x) = x,\ \rho \le x \le R\} & L_2 = \{z(x) = xe^{i\pi},\ R \ge x \ge \rho\} \\ C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\} & C_\rho = \{z(\theta) = \rho e^{i\theta},\ \pi \ge \theta \ge 0\} \end{array}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = 2i$, si osservi che $f(z) = [\log(z)/(z+2i)]/(z-2i)$, per $R > 2$ e $\rho < 2$ si ha

$$\begin{aligned} \int_C f(z)\ dz &= \int_{L_1} f(z)\ dz + \int_{C_R} f(z)\ dz + \int_{L_2} f(z)\ dz + \int_{C_\rho} f(z)\ dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = 2\pi i \frac{\log\left(2e^{i\pi/2}\right)}{2i+2i} = \frac{\pi}{2}\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\ dz = \int_\rho^R \frac{\ln x}{x^2+4}\ dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\ dz = \int_R^\rho \frac{\ln x + i\pi}{x^2+4}\ e^{i\pi} dx = \int_\rho^R \frac{\ln x}{x^2+4}\ dx + i\pi \int_\rho^R \frac{1}{x^2+4}\ dx$$

$$\int_{C_R} f(z)\ dz = \int_0^\pi \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta}+4}\ iRe^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{C_\rho} f(z)\ dz = \int_\pi^0 \frac{\ln \rho + i\theta}{\rho^2 e^{2i\theta}+4}\ i\rho e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

e quindi nel limite $\rho \to 0$ e $R \to \infty$

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\ dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\ dx = \frac{\pi}{2}\left(\ln 2 + i\frac{\pi}{2}\right)$$

da cui prendendo la parte reale e quella immaginaria

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+4}\ dx = \frac{\pi}{4}\ln 2 \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^2+4}\ dx = \frac{\pi}{4}$$