METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 22 febbraio 2005

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

<u>Esercizio 1</u> Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze (nel caso di funzioni polidrome si consideri il ramo principale)

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{\infty} i^{-in} z^n \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log(in) z^{2n}$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!}$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| &= \frac{(3n)! + 4^n}{(3n+1)!} \frac{(3n+4)!}{(3n+3)! + 4^{n+1}} \\ &= \frac{(3n+4)(3n+3)(3n+2)[1 + 4^n/(3n)!]}{(3n+3)(3n+2)(3n+1) + 4^{n+1}/(3n)!} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \end{aligned}$$

avendo usato $\ln n! \sim n \ln n - n$. Si ha quindi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = 1$$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = i^{-in} = e^{-in \log i} = e^{-in(\ln 1 + i\pi/2)} = e^{n\pi/2}$$

Inoltre

$$|a_n|^{1/n} = e^{\pi/2}$$

e quindi

$$R = e^{-\pi/2}$$

(c) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta nella forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} \log(in/2) & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Osservando che $|\log(in/2)| = \sqrt{(\ln(n/2))^2 + \pi^2/4}$ e ricordando che

$$\lim_{n\to\infty} (\ln n)^{1/n} = 1$$

si ha

$$\begin{aligned} R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{(\ln(k_n/2))^2 + \pi^2/4} \right)^{1/k_n} = 1 \end{aligned}$$

essendo $k_n = n$ se n è pari o $k_n = n+1$ se n è dispari. In conclusione, $R = 1$.

Esercizio 2 Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni

$(a)\quad \left(1+z^2\right)^z$ ramo principale $\qquad (b)\quad \dfrac{\sinh(\sin(z))}{z^2+9}$

[punteggio 6]

(a) Osservando che

$$\left(1+z^2\right)^z = \exp[z\log(1+z^2)]$$

poiché la funzione $\exp(z)$ è intera e il ramo principale di $\log(z)$ è una funzione analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo, origine compresa, la funzione $\left(1+z^2\right)^z$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti z tali che

$$1+z^2=-a \qquad \text{con } a\geq 0$$

cioé

$$z=(-1-a)^{1/2}=\pm i\sqrt{1+a} \qquad a\geq 0$$

che sono tutti i punti dell'asse immaginario ad eccezione dell'intervallo $(-1,1)$ dello stesso asse.

(b) Osservando che le funzioni $\sinh(z)$ e $\sin(z)$ sono intere e la funzione razionale $1/(z^2+9)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti isolati $z=\pm 3i$, per la derivabilità delle funzioni composte, la funzione $\sinh(\sin(z))/(z^2+9)$ è analitica ovunque ad eccezione dei punti isolati $z=\pm 3i$.

<u>Esercizio 3</u> Calcolare tutte le soluzioni della seguente equazione e graficarle nel piano complesso

$$\cos\left(3z^2\right) = 0$$

[punteggio 5]

Posto $w = x + iy$, le soluzioni dell'equazione

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}$$

ovvero $y = 0$ e $x = \pm(2k+1)\pi/2$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si ha quindi che $\cos\left(3z^2\right) = 0$ quando

$$3z^2 = \pm\frac{\pi}{2}(2k+1) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

cioé quando

$$z = \sqrt{\pm\frac{\pi}{6}(2k+1)} = \begin{cases} \pm\sqrt{(2k+1)\pi/6} \\ \pm i\sqrt{(2k+1)\pi/6} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Esercizio 4 Determinare il valore del ramo principale di

$$\arctan(2+i)$$

[punteggio 5]

Posto $w = \arctan(z)$, si ha $\tan w = z$ ovvero

$$iz = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

che risolta rispetto a e^{2iw} fornisce

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

e quindi

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz} = \frac{i}{2} \log \frac{i+z}{i-z}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\arctan(2+i) &= \frac{i}{2} \log \frac{i+2+i}{i-2-i} \\
&= \frac{i}{2} \log(-1-i) \\
&= \frac{i}{2} \log\left(\sqrt{2} e^{-i3\pi/4}\right) \\
&= \frac{i}{2} \left(\ln \sqrt{2} - i\frac{3}{4}\pi\right) \\
&= \frac{3}{8}\pi + \frac{i}{4} \ln 2
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Calcolare l'integrale della funzione $f(z) = (z - \overline{z})^2$ lungo il cammino C rappresentato dal triangolo di vertici $z_1 = (0,0)$, $z_2 = (1,0)$, $z_3 = (0,1)$, percorso in verso antiorario.

[punteggio 5]

Si ponga $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ con

$$\begin{aligned} C_1 &= \{z(t) = t,\ 0 \le t \le 1\} \\ C_2 &= \{z(t) = 1 - t + it,\ 0 \le t \le 1\} \\ C_3 &= \{z(t) = i(1-t),\ 0 \le t \le 1\} \end{aligned}$$

Osservando che $f(z) = -4(\operatorname{Im} z)^2$, e usando la definizione di integrale su cammino

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt \qquad C = \{z(t),\ a \le t \le b\}$$

si ha

$$\int_{C_1} f(z)dz = \int_0^1 01dt = 0$$

$$\int_{C_2} f(z)dz = \int_0^1 -4t^2(-1+i)dt = \left[4(1-i)\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3} - i\frac{4}{3}$$

$$\int_{C_3} f(z)dz = \int_0^1 -4(1-t)^2(-i)dt = \left[-i\frac{4}{3}(1-t)^3\right]_0^1 = i\frac{4}{3}$$

In conclusione

$$\begin{aligned} \int_C f(z)dz &= \int_{C_1 \cup C_2 \cup C_3} f(z)dz \\ &= \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz + \int_{C_3} f(z)dz \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Esercizio 6 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_{C_R} z^z(1+\log z)dz$$

dove C_R è la circonferenza $|z| = R$ percorsa in verso antiorario. Suggerimento: si consideri che la derivata di z^z è ...

[punteggio 6]

Posto $z = re^{i\theta}$, il ramo principale di $F(z) = z^z$ è una funzione analitica per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ e in questa regione la sua derivata vale

$$\frac{d}{dz}z^z = \frac{d}{dz}e^{z\log z} = e^{z\log z}(\log z + 1)$$

Posto $C_{R,\varepsilon} = \{z(\varphi) = Re^{i\varphi},\ -(\pi-\varepsilon) \leq \varphi \leq \pi+\varepsilon\}$, per $z \in C_{R,\varepsilon}$ la funzione $F(z)$ è una primitiva della funzione integranda $f(z) = z^z(1+\log z)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} z^z(1+\log z)dz &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_{R,\varepsilon}} z^z(1+\log z)dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[z^z\right]_{z=Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(e^{Re^{i(\pi-\varepsilon)}[\ln R+i(\pi-\varepsilon)]} - e^{Re^{-i(\pi-\varepsilon)}[\ln R-i(\pi-\varepsilon)]}\right) \\
&= e^{-R(\ln R+i\pi)} - e^{-R(\ln R-i\pi)} \\
&= -2ie^{-R\ln R}\sin(\pi R) \\
&= -\frac{2i\sin(\pi R)}{R^R}
\end{aligned}$$