METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 22 marzo 2003

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Classificare tutte le singolarità isolate delle seguenti funzioni e calcolarne i corrispondenti residui

$$(a)\ \cos\left(\frac{1}{z-2}\right) \qquad (b)\ z^3\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$$

[punteggio 6]

(a) La funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 2$. Ricordando che per $|w| < \infty$

$$\cos w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}$$

e posto $w = 1/(z-2)$, per $0 < |z-2| < \infty$ si ha

$$\cos\left(\frac{1}{z-2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è essenziale e

$$\mathrm{Res}\left[\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)\right]_{z=2} = 0$$

(b) Anche in questo caso la funzione ha un'unica singolarità isolata in $z = 2$. Per $0 < |z-2| < \infty$ si ha

$$\begin{aligned} z^3\cos\left(\frac{1}{z-2}\right) &= (z-2+2)^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!(z-2)^{2n}} \\ &= \left[(z-2)^3 + 6(z-2)^2 + 12(z-2) + 8\right] \\ &\quad \times \left[1 - \frac{1}{2(z-2)^2} + \frac{1}{24(z-2)^4} - \frac{1}{120(z-2)^6} + \dots\right] \end{aligned}$$

Da questa espressione segue che la singolarità è essenziale e

$$\mathrm{Res}\left[z^3\cos\left(\frac{1}{z-2}\right)\right]_{z=2} = \frac{1}{24} - \frac{12}{2} = -\frac{143}{24}$$

Esercizio 2 Supponendo che $f(z)$ e $p(z)$ siano analitiche in z_0 e che $f(z)$ abbia uno zero di ordine m in z_0, determinare

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}p(z)\right]_{z=z_0}$$

[punteggio 6]

Per ipotesi in un intorno $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ possiamo scrivere

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z)$$

con $g(z)$ analitica e non nulla in z_0. Derivando questa relazione si ha

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z)$$

e quindi

$$\begin{aligned} \frac{f'(z)}{f(z)}p(z) &= \left(\frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right) p(z) \\ &= \left(\frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{p^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k \end{aligned}$$

Essendo $g'(z)/g(z)$ analitica in z_0 segue immediatamente che

$$\text{Res}\left[\frac{f'(z)}{f(z)}p(z)\right]_{z=z_0} = mp(z_0)$$

Esercizio 3 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2}\, dx \qquad a>0 \qquad b>0$$

[punteggio 8]

Poiché la funzione integranda è pari

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2}\, dx$$

Posto $f(z) = z/(z^2+b^2)$ e detto $C = C_1 \cup C_2$ il cammino chiuso di integrazione con $C_1 = \{z(x) = x,\ -R \le x \le R\}$ e $C_2 = \{z(\theta) = R\exp(i\theta),\ 0 \le \theta \le \pi\}$, per $R > b$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)e^{iaz}\, dz &= \int_{C_1} f(z)e^{iaz}\, dz + \int_{C_2} f(z)e^{iaz}\, dz \\
&= \int_{-R}^{R} \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}\, dx + \int_{C_2} f(z)e^{iaz}\, dz \\
&= 2\pi i \mathrm{Res}\left[f(z)e^{iaz}\right]_{z=ib} = 2\pi i \left.\frac{ze^{iaz}}{z+ib}\right]_{z=ib} = \pi i e^{-ab}
\end{aligned}$$

Per $z \in C_2$, risulta $|f(z)| \le R/(R^2-b^2)$ infinitesimo per $R \to \infty$ e quindi per il lemma di Jordan[1]

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_2} f(z)e^{iaz}\, dz = 0$$

In conclusione

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{iax}}{x^2+b^2}\, dx = \pi i e^{-ab}$$

da cui prendendo la parte immaginaria

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin(ax)}{x^2+b^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}$$

[1] Esplicitamente

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_2} f(z)e^{iaz}\, dz\right| &\le \int_0^{\pi} \left|\frac{Re^{i\theta}}{R^2e^{2i\theta}+b^2} \exp\left(iaRe^{i\theta}\right)\right| d\theta \\
&\le \frac{R^2}{R^2-b^2}\int_0^{\pi} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta = \frac{2R^2}{R^2-b^2}\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\theta}\, d\theta \\
&\le \frac{2R^2}{R^2-b^2}\int_0^{\pi/2} e^{-aR2\theta/\pi}\, d\theta = \frac{2R^2}{R^2-b^2}\,\frac{1-e^{-aR}}{2aR/\pi} \overset{R\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} \qquad a > b > 0$$

[punteggio 8]

Ponendo $e^{i\theta} = z$, si ha $d\theta = dz/iz$, $\cos\theta = (z + z^{-1})/2$ e

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} = \int_{|z|=1} f(z)\ dz$$

dove

$$f(z) = \frac{-4iz}{\left(bz^2 + 2az + b\right)^2}$$

Poiché le radici di $bz^2 + 2az + b = 0$ sono i numeri reali

$$z_\pm = -\frac{a}{b} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1}$$

con $z_- < -1$ e $-1 < z_+ < 0$ (si osservi che $z_+ z_- = 1$) la funzione $f(z)$ ha all'interno del cerchio $|z| = 1$ una singolarità isolata in $z = z_+$. Tale singolarità è un polo doppio in quanto

$$f(z) = \frac{-4iz}{b^2(z - z_-)^2(z - z_+)^2} = \frac{\phi(z)}{(z - z_+)^2}$$

con

$$\phi(z) = \frac{-4iz}{b^2(z - z_-)^2}$$

analitica e non nulla in z_+. Il corrispondente residuo vale

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=z_+} &= \phi'(z_+) \\ &= \frac{-4i}{b^2}\frac{(z_+ - z_-) - 2z_+}{(z_+ - z_-)^3} = \frac{-ia}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(a + b\cos\theta)^2} = 2\pi i \mathrm{Res}\,[f(z)]_{z=z_+} = \frac{2\pi a}{(a^2 - b^2)^{3/2}}$$

Esercizio 5 Determinare il numero di radici, contandone la molteplicità, dell'equazione

$$z^4 - 5z + 1 = 0$$

contenute nella regione $1 \leq |z| < 2$.

[punteggio 8]

Si ponga $z^4 - 5z + 1 = f(z) + g(z)$, con

$$f(z) = -5z + 1$$
$$g(z) = z^4$$

Per $|z| = 1$ si ha

$$|f(z)| \geq ||-5z| - |1|| = 4$$
$$|g(z)| = |z^4| = 1$$

cioé $|f(z)| > |g(z)|$. Poiché $f(z)$ ha uno zero semplice in $z = 1/5$, per il teorema di Rouché anche $f(z) + g(z)$ ha uno zero in $|z| < 1$.
Per $|z| = 2$ si ha

$$|f(z)| \leq |-5z| + |1| = 11$$
$$|g(z)| = |z^4| = 16$$

cioé $|g(z)| > |f(z)|$. Poiché $g(z)$ ha uno zero con molteplicità 4 in $z = 0$, per il teorema di Rouché $g(z) + f(z)$ ha 4 zeri in $|z| < 2$. Si conclude che nella regione $1 \leq |z| < 2$, l'equazione $z^4 - 5z + 1 = 0$ ha 3 radici.

Esercizio 6 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx$$

[punteggio 9]

Posto

$$f(z) = \frac{\log z}{z^2+1} \qquad \log z = \ln|z| + i \arg z, \qquad -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{3\pi}{2}$$

e detto $C = L_1 \cup C_R \cup L_2 \cup C_\rho$ il cammino chiuso di integrazione con

$$L_1 = \{z(x) = x,\ \rho \le x \le R\} \qquad L_2 = \{z(x) = xe^{i\pi},\ R \ge x \ge \rho\}$$
$$C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\} \qquad C_\rho = \{z(\theta) = \rho e^{i\theta},\ \pi \ge \theta \ge 0\}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = i$ (si osservi che $f(z) = (\log(z)/(z+i))/(z-i)$, per $R > 1$ e $\rho < 1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\ dz &= \int_{L_1} f(z)\ dz + \int_{C_R} f(z)\ dz + \int_{L_2} f(z)\ dz + \int_{C_\rho} f(z)\ dz \\ &= 2\pi i \mathrm{Res}\left[f(z)\right]_{z=i} = 2\pi i \frac{\log\left(1e^{i\pi/2}\right)}{i+i} = i\frac{\pi^2}{2}\end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\ dz = \int_\rho^R \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx$$

$$\int_{L_2} f(z)\ dz = \int_R^\rho \frac{\ln x + i\pi}{x^2+1}\ e^{i\pi} dx = \int_\rho^R \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx + i\pi \int_\rho^R \frac{1}{x^2+1}\ dx$$

$$\int_{C_R} f(z)\ dz = \int_0^\pi \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta}+1}\ iRe^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{C_\rho} f(z)\ dz = \int_\pi^0 \frac{\ln \rho + i\theta}{\rho^2 e^{2i\theta}+1}\ i\rho e^{i\theta} d\theta \xrightarrow{\rho\to 0} 0$$

e quindi nel limite $\rho \to 0$ e $R \to \infty$

$$2\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx + i\pi \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\ dx = i\frac{\pi^2}{2}$$

da cui prendendo la parte reale e quella immaginaria

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1}\ dx = 0 \qquad \int_0^\infty \frac{1}{x^2+1}\ dx = \frac{\pi}{2}$$