METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2003/2004 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 27 febbraio 2004

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare la funzione $v(x,y)$ armonica coniugata alla funzione $u(x,y) = x + \sin(x^2 - y^2)\cosh(2xy)$ nell'intero piano xy.

[punteggio 6]

Nella regione considerata, v è armonica coniugata di u se e solo se $f = u+iv$ è analitica. Devono pertanto essere soddisfatte le equazioni di Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$. Dalla seconda si ha

$$\begin{aligned} v_x(x,y) &= -u_y(x,y) \\ &= 2y\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) - 2x\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) \\ &= \frac{d}{dx}\left[\cos(x^2-y^2)\sinh(2xy)\right] \end{aligned}$$

che risolta da

$$v(x,y) = \cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) + \phi(y)$$

e dalla prima

$$\begin{aligned} v_y(x,y) &= 2y\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) + 2x\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) + \phi'(y) \\ &= u_x(x,y) \\ &= 1 + 2x\cos(x^2-y^2)\cosh(2xy) + 2y\sin(x^2-y^2)\sinh(2xy) \end{aligned}$$

ovvero

$$\phi'(y) = 1$$

che risolta da

$$\phi(y) = y + C$$

In conclusione

$$v(x,y) = y + \cos(x^2-y^2)\sinh(2xy) + C$$

Si noti che

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = z + \sin\left(z^2\right) + iC$$

dove $z = x + iy$.

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(z)\cos(z) = 2$$

[punteggio 6]

Dalla definizione $\sin z = (e^{iz} - e^{-iz})/2i$ e $\cos z = (e^{iz} + e^{-iz})/2$ e posto $z = x + iy$ l'equazione da risolvere è

$$e^{i(2x+i2y)} - e^{-i(2x+i2y)} = 8i$$

da cui prendendo la parte reale e quella immaginaria

$$\begin{cases} \cos(2x)\sinh(2y) = 0 \\ \sin(2x)\cosh(2y) = 4 \end{cases}$$

La soluzione $y = 0$ della prima equazione non è compatibile con la seconda equazione. Deve perciò essere $\cos(2x) = 0$ ovvero $2x = \pi/2 + \pi k$, con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. Questa soluzione è compatibile con la seconda equazione solo per n pari. In questo caso la seconda equazione fornisce $\cosh(2y) = 4$ ovvero

$$\left(e^{2y}\right)^2 - 8e^{2y} + 1 = 0$$

che risolta da

$$e^{2y} = 4 \pm \sqrt{15}$$

In conclusione

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ y = \frac{1}{2}\ln\left(4 \pm \sqrt{15}\right) = \pm\frac{1}{2}\ln\left(4 + \sqrt{15}\right) \end{cases}$$

Alternativamente si risolva $\sin(2z) = 4$. Posto $w = e^{i2z}$ si ha

$$w^2 - 8iw - 1 = 0$$

cha da

$$w = e^{i2z} = i\left(4 \pm \sqrt{15}\right)$$

Prendendo il logaritmo

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2i}\left[\ln\left(4 \pm \sqrt{15}\right) + i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)\right] \\ &= \left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \pm \frac{i}{2}\ln\left(4 + \sqrt{15}\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Esercizio 3 Dimostare che per un generico ramo del logaritmo la derivata esiste e vale

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}$$

[punteggio 5]

Un generico ramo del logaritmo è definito da $\log z = \ln|z| + i\arg z$ con $|z| > 0$ e $\alpha < \arg z < \alpha + 2\pi$. Posto $z = re^{i\theta}$ e decomponendo in parte reale e immaginaria si ottiene

$$\log z = u(r,\theta) + iv(r,\theta) \qquad u(r,\theta) = \ln r \qquad v(r,\theta) = \theta$$

Le funzioni $u(r,\theta)$ e $v(r,\theta)$ hanno derivate prime parziali continue nel dominio $\{r > 0,\ \alpha < \theta < \alpha + 2\pi\}$

$$u_r(r,\theta) = \frac{1}{r} \qquad u_\theta(r,\theta) = 0$$

$$v_r(r,\theta) = 0 \qquad v_\theta(r,\theta) = 1$$

inoltre soddisfano le equazioni di Cauchy-Riemann

$$r\ u_r(r,\theta) = v_\theta(r,\theta) \qquad u_\theta(r,\theta) = -r\ v_r(r,\theta)$$

La funzione $\log z$ ha dunque derivata in ogni punto del dominio specificato e questa vale

$$\frac{d}{dz}\log z = e^{-i\theta}\left(u_r(r,\theta) + iv_r(r,\theta)\right) = e^{-i\theta}\left(\frac{1}{r} + i0\right) = \frac{1}{z}$$

Esercizio 4 Stabilire il dominio di analiticità dei rami principali delle seguenti funzioni

$(a)\quad z^{\sinh z} \qquad (b)\quad \log(\cos z)$

[punteggio 6]

(a) La funzione $z^{\sinh z}$ è definita dall'equazione

$$z^{\sinh z} = \exp(\sinh z \log z)$$

Poiché la composizione di funzioni analitiche è analitica e le funzioni exp e sinh sono monodrome e intere, il ramo principale di $z^{\sinh z}$ è analitico nel dominio in cui il ramo principale di $\log z$ è analitico, ovvero nell'intero piano complesso ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine.

(b) Ragionando come al punto (a), il dominio di analiticità di $\log(\cos z)$ coincide con tutto il piano complesso ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$\cos z = -t \qquad t \geq 0$$

Posto $z = x + iy$, questa condizione equivale a

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = -t \qquad t \geq 0 \\ \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}$$

La seconda equazione del sistema è soddisfatta quando $\sin x = 0$ oppure $\sinh y = 0$. Nel primo caso $x = \pi k$, $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$: le soluzioni con k pari sono incopatibili con la prima equazione mentre per k dispari risulta $\cosh y = t$. Si ha dunque

$$z = (2k+1)\pi + iy \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad -\infty < y < \infty$$

La soluzione $\sinh y = 0$, cioé $y = 0$, sostituita nella prima equazione da $x = \arccos(-t)$ con $t \geq 0$. Si ha dunque

$$z = x + i0 \qquad \frac{\pi}{2} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

Esercizio 5 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, dimostrare che

$$\lim_{R\to\infty} \int_{|z|=R} z^{-3/2} \log z \; dz = 0$$

[punteggio 5]

Posto $z = re^{i\theta}$ la integranda è

$$z^{-3/2} \log z = r^{-\frac{3}{2}} e^{-i\frac{3}{2}\theta} \left(\ln r + i\theta\right) \qquad r > 0 \qquad -\pi < \theta < \pi$$

Sul cerchio $|z| = R$ si ha $r = R$ e $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Per il modulo della funzione integranda vale la seguente maggiorazione

$$\left| R^{-\frac{3}{2}} e^{-i\frac{3}{2}\theta} \left(\ln R + i\theta\right) \right| = R^{-\frac{3}{2}} \left|\ln R + i\theta\right| \leq R^{-\frac{3}{2}} \left(\ln R + \pi\right)$$

Pertanto

$$\left| \int_{|z|=R} z^{-3/2} \log z \; dz \right| \leq R^{-\frac{3}{2}} \left(\ln R + \pi\right) \; 2\pi R = 2\pi \frac{\ln R + \pi}{\sqrt{R}} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

Esercizio 6 Assumendo per $z^{3/2}$ il ramo principale e per il cammino $|z| = R$ il verso di percorrenza antiorario, calcolare l'integrale

$$\int_{|z|=R} z^{3/2}\ dz$$

[punteggio 6]

Posto $z = re^{i\theta}$ la funzione integranda è definita da

$$z^{3/2} = r^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}\theta} \qquad r > 0 \qquad -\pi < \theta < \pi$$

Scelto il cammino $C_\beta = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ \beta \leq \theta \leq \beta + 2\pi\}$ con β arbitrario, la funzione integranda è continua a tratti per $z \in C$ e risulta (assumendo ad esempio $0 \leq \beta \leq \pi$)

$$\begin{aligned}
\int_{C_\beta} z^{3/2}\ dz &= \int_\beta^\pi R^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}\theta}\ iRe^{i\theta}\ d\theta + \int_\pi^{\beta+2\pi} R^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{3}{2}(\theta-2\pi)}\ iRe^{i\theta}\ d\theta \\
&= iR^{\frac{5}{2}} \left(\int_\beta^\pi e^{i\frac{5}{2}\theta}\ d\theta + e^{-i3\pi} \int_\pi^{\beta+2\pi} e^{i\frac{5}{2}\theta}\ d\theta \right) \\
&= iR^{\frac{5}{2}} \frac{2}{5i} \left(e^{i\frac{5}{2}\theta} \Big]_\beta^\pi - e^{i\frac{5}{2}\theta} \Big]_\pi^{\beta+2\pi} \right) \\
&= \frac{2}{5} R^{\frac{5}{2}} 2 e^{i\frac{5}{2}\pi}
\end{aligned}$$

Dunque, indipendentemente dal valore scelto per β, si ha

$$\int_{|z|=R} z^{3/2}\ dz = i\frac{4}{5} R^{5/2}$$

Alternativamente, si osservi che $z^{3/2}$ (ramo principale) è analitica sul cammino $C_\varepsilon = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ -\pi + \varepsilon \leq \theta \leq \pi - \varepsilon\}$ e ivi ammette la primitiva $\frac{2}{5} z^{5/2}$ (ramo principale). Si ha allora

$$\begin{aligned}
\int_{|z|=R} z^{3/2}\ dz &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{C_\varepsilon} z^{3/2}\ dz \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{5} z^{5/2} \Big]_{z=Re^{i(-\pi+\varepsilon)}}^{z=Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2}{5} R^{5/2} \left(e^{i\frac{5}{2}(\pi-\varepsilon)} - e^{i\frac{5}{2}(-\pi+\varepsilon)} \right) \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} i\frac{4}{5} R^{5/2} \cos\left(\frac{5}{2}\varepsilon \right) \\
&= i\frac{4}{5} R^{5/2}
\end{aligned}$$