METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2003/2004 – Prof. C. Presilla

Prova finale 29 marzo 2004

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2	3

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

<u>Esercizio 1</u> Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$e^{z^2} = -1$$

[punteggio 3]

Prendendo il logaritmo di entrambi i membri si ha

$$z^2 = \log(-1) = \log\left(1\ e^{i\pi}\right) = \ln 1 + i(\pi + 2\pi k) = (2k+1)i\pi \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \dots$$

e quindi estraendo la radice quadrata

$$z = \sqrt{(2k+1)\pi e^{i\frac{\pi}{2}}} = \sqrt{(2k+1)\pi}\, e^{\left(i\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}\right)} \qquad n = 0, 1 \qquad \text{se } k = 0, 1, 2, \dots$$

$$z = \sqrt{|2k+1|\,\pi e^{i\frac{3\pi}{2}}} = \sqrt{|2k+1|\,\pi}\, e^{\left(i\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}\right)} \qquad n = 0, 1 \qquad \text{se } k = -1, -2, \dots$$

Ponendo $k = -m - 1$, è possibile riscrivere il secondo sistema di soluzioni come

$$z = \sqrt{(2m+1)\pi}\ e^{\left(i\frac{3\pi}{4} + \frac{2\pi n}{2}\right)} \qquad n = 0, 1 \qquad m = 0, 1, 2, \dots$$

In conclusione, le soluzioni cercate sono

$$z^{\pm}_{1,k} = \pm(1+i)\sqrt{\frac{2k+1}{2}\ \pi} \qquad z^{\pm}_{2,k} = \pm(1-i)\sqrt{\frac{2k+1}{2}\ \pi}$$

con $k = 0, 1, 2, \dots$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a)\ \sum_{n=0}^{\infty} \cos(in^2) z^n \qquad (b)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^{3n}}{(3n)!} z^n$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \cos(in^2) = \frac{e^{-n^2} + e^{n^2}}{2}$$

e si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{e^{-n^2} + e^{n^2}}{e^{-(n+1)^2} + e^{(n+1)^2}} = \frac{e^{-2n^2} + 1}{e^{-2n^2-2n-1} + e^{2n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 0$.

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \frac{n^{3n}}{(3n)!}$$

e si ha

$$\begin{aligned} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} &= \frac{n^{3n}}{(3n)!} \frac{(3(n+1))!}{(n+1)^{3(n+1)}} = \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^3} \frac{n^{3n}}{(n+1)^{3n}} \\ &= \frac{27(n+1)\left(n+\frac{2}{3}\right)\left(n+\frac{1}{3}\right)}{(n+1)^3} \frac{1}{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^3} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{27}{e^3} \end{aligned}$$

Il raggio di convergenza della serie è dunque $R = 27/e^3$.

Esercizio 3 Determinare l'argomento principale del valore principale di

$$\left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{e^\pi}{\sqrt{2}}\right)^{i+1}$$

[punteggio 3]

Utilizzando $z^c = \exp(c \operatorname{Log} z)$ con il valore principale del logaritimo definito da $\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$ con $-\pi < \operatorname{Arg} z \leq \pi$, si ha

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{e^\pi}{\sqrt{2}}\right)^{i+1} &= \exp\left[(i+1)\operatorname{Log}\left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{e^\pi}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \exp\left[(i+1)\operatorname{Log}\left(e^\pi \ e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\right] \\
&= \exp\left[(i+1)\left(\ln e^\pi + i\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \exp\left[(i+1)\left(\pi + i\frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= \exp\left[\pi - \frac{\pi}{4} + i\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
&= e^{\frac{3\pi}{4} + i\frac{5\pi}{4}}
\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{e^\pi}{\sqrt{2}} + i\frac{e^\pi}{\sqrt{2}}\right)^{i+1} = -\frac{3\pi}{4}$$

Esercizio 4 Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni (usare il ramo principale nel caso di funzioni polidrome)

$$(a)\ \cosh\left(e^{\sinh z}\right) \qquad (b)\ \log(3+z^2)$$

[punteggio 6]

(a) Le funzioni $\cosh z$, e^z e $\sinh z$ sono intere e la composizione di funzioni intere è intera. Dunque

$$\cosh\left(e^{\sinh z}\right)$$

è analitica nell'intero piano complesso.

(b) La diramazione principale di $\log z$ è analitica ovunque ad eccezione del semiasse reale negativo inclusa l'origine. Pertanto la funzione in esame è analitica ovunque ad eccezione dei punti z che soddisfano

$$3+z^2=-a \qquad a\geq 0$$

ovvero nei punti

$$z=\sqrt{-3-a}=\pm i\sqrt{3+a} \qquad a\geq 0,$$

cioé lungo i semiassi immaginari $[\sqrt{3},\infty)$ e $[-\sqrt{3},-\infty)$.

Esercizio 5 Sviluppare in serie di Taylor di centro $z_0 = 3$ il ramo principale della funzione $\log z$ e determinare il raggio di convergenza di tale serie.

[punteggio 4]

Il ramo principale di $\log z$

$$\log z = \ln |z| + i \arg z \qquad |z| > 0 \qquad -\pi < \arg z < \pi$$

è analitico in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione del semiasse reale negativo origine compresa. E' evidente che il massimo cerchio di centro $z_0 = 3$ in cui $\log z$ è analitica ha raggio 3. Detto z un qualsiasi punto tale che $|z-3| < 3$, si ha

$$\begin{aligned}
\log z - \log 3 &= \int_3^z \frac{ds}{s} = \int_3^z \frac{ds}{3\left(1 + \frac{s-3}{3}\right)} \\
&= \int_3^z \frac{ds}{3} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s-3}{3}\right)^k \qquad \left|\frac{s-3}{3}\right| < 1 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} \int_3^z ds (s-3)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)3^{k+1}} (z-3)^{k+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} (z-3)^n
\end{aligned}$$

Quindi

$$\begin{aligned}
\log z &= \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} (z-3)^n \\
&= \ln 3 + \frac{z-3}{3} - \frac{(z-3)^2}{18} + \frac{(z-3)^3}{81} + \ldots
\end{aligned}$$

Una verifica diretta conferma che il raggio di convergenza della serie è $R = 3$. Infatti, detto a_n il coefficiente n-esimo della serie, si ha

$$\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = 3\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 3$$

Esercizio 6 Dopo aver determinato la natura della singolarità, calcolare il residuo della funzione

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{z(1-\cos z)}$$

in $z = 0$.

[punteggio 4]

Espandendo in serie di Mac Laurin le funzioni esponenziale, seno e coseno, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)}{z\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots\right)} \\
&= \frac{2}{z^3} \frac{z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots}{1 - \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)} \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots\right) \\
&\quad \times \left[1 + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right) + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{12}z^2 + \frac{7}{720}z^4 + \dots\right) \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{5}{12}z^3 + \frac{1}{12}z^4 - \frac{1}{720}z^5 + \dots\right) \\
&= \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{5}{6} + \frac{z}{6} - \frac{z^2}{360} + \dots
\end{aligned}$$

Pertanto $f(z)$ ha in $z = 0$ un polo di ordine 2 con

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2$$

<u>Esercizio 7</u> Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\; dx$$

[punteggio 4]

La funzione

$$f(z) = \frac{z}{z^3+1}$$

ha poli semplici in $z_k = e^{i\frac{\pi}{3}+i\frac{2\pi}{3}k}$, $k = 0,1,2$. Detto $C = L_1 \cup C_R \cup L_2$ il cammino di integrazione chiuso definito da

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{z(x) = x,\ 0 \le x \le R\} \\
C_R &= \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi/3\} \\
L_2 &= \{z(x) = xe^{i\frac{2}{3}\pi},\ R \ge x \ge 0\}
\end{aligned}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = z_0$ per $R > 1$ si ha

$$\int_C f(z)\; dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 2\pi i\; \frac{z_0}{3z_0^2} = \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

mentre i singoli cammini di integrazione valgono

$$\int_{L_1} f(z)\; dz = \int_0^R \frac{x}{x^3+1}\; dx$$

$$\int_{C_R} f(z)\; dz = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \frac{Re^{i\theta}}{R^3 e^{3i\theta}+1}\; iRe^{i\theta} d\theta \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{L_2} f(z)\; dz = \int_R^0 \frac{xe^{i\frac{2}{3}\pi}}{x^3 e^{i2\pi}+1}\; e^{i\frac{2}{3}\pi} dx = -e^{i\frac{4}{3}\pi} \int_0^R \frac{x}{x^3+1}\; dx$$

e quindi nel limite $R \to \infty$ si ottiene

$$\left(1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}\right) \int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\; dx = \frac{2\pi i}{3} e^{-i\frac{\pi}{3}}$$

In conclusione

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^3+1}\; dx = \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1 - e^{i\frac{4}{3}\pi}} = \frac{2\pi i}{3} \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}} e^{-i\frac{2}{3}\pi}}{e^{-i\frac{2}{3}\pi} - e^{i\frac{2}{3}\pi}} = \frac{\pi}{3\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right)} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

Esercizio 8 Enunciare e dimostrare il teorema della formula integrale di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

[punteggio 4]

Teorema 1 (formula integrale di Cauchy). *Sia $f(z)$ analitica su e dentro il cammino chiuso semplice C orientato positivamente. Se z_0 è un qualsiasi punto interno a C allora*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Dimostrazione. Sia $C_\rho = \{z(\theta) = z_0 + \rho e^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi\}$ con ρ sufficientemente piccolo affinché C_ρ sia interno a C. Poiché $f(z)/(z - z_0)$ è analitica su C, su C_ρ e nella regione compresa tra C e C_ρ, per il principio di deformazione dei cammini si ha

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \int_{C_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz$$

Da questa, e usando $\int_{C_\rho} (z - z_0)^{-1}\, dz = 2\pi i$, segue

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz - 2\pi i f(z_0) = \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz$$

Poiché f è analitica e quindi continua in z_0, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ se $|z - z_0| < \delta$. Scelto $\rho < \delta$, si ha

$$\left| \int_{C_\rho} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}\, dz \right| < \frac{\varepsilon}{\rho}\, 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon$$

Dall'arbitrarietà di ε segue che $\int_{C_\rho} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\, dz = 0$ e quindi l'asserto. $\square$