METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

Prova finale 29 marzo 2007

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$, determinare sotto quale condizione l'equazione

$$az + b\overline{z} + c = 0$$

ha una e una sola soluzione e determinare tale soluzione.

[punteggio 5]

L'equazione proposta e la sua complessa coniugata formano il sistema lineare di equazioni

$$\begin{cases} az + b\overline{z} = -c \\ \overline{b}z + \overline{a}\overline{z} = -\overline{c} \end{cases}$$

nelle incognite z e $\overline{z}$. Il sistema ammette una e una sola soluzione se il determinante associato è non nullo

$$\begin{vmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{vmatrix} = |a|^2 - |b|^2 \neq 0.$$

In tal caso, usando la regola di Cramer la soluzione è

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -\overline{c} & \overline{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{vmatrix}} = \frac{b\overline{c} - \overline{a}c}{|a|^2 - |b|^2}.$$

Esercizio 2 Per la serie di potenze $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ con $a_n, z, z_0 \in \mathbb{C}$ si definisca il numero R, $0 \leq R \leq \infty$, mediante la formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n},$$

dimostrare che la serie converge uniformemente in $\overline{B}(z_0, r)$ con $0 < r < R$.

[punteggio 6]

Per semplicità di notazione si ponga $w = z - z_0$.
Sia $0 < r < R$, allora $\exists\ \rho$ tale che $r < \rho < R$. Poiché $1/\rho > 1/R = \limsup |a_n|^{1/n}$, dalla definizione di limsup concludiamo che $\exists\ N$ tale che $|a_n|^{1/n} < 1/\rho\ \forall n \geq N$. Quest'ultima disugualianza può essere riscritta come $|a_n| < 1/\rho^n$ e quindi $\forall w \in \overline{B}(0,\rho)$ si ha $|a_n w^n| < (|w|/\rho)^n < (r/\rho)^n\ \forall n \geq N$. Poiché $r/\rho < 1$, la serie reale $\sum_{n=0}^{\infty}(r/\rho)^n$ converge e pertanto in base al test M di Weierstrass la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ converge uniformemente in $\overline{B}(z_0, r)$.

<u>Esercizio 3</u> Determinare il valore dell'integrale

$$\int_C \frac{1}{\bar{z}}\,dz$$

dove C è il cammino chiuso, percorso in verso antiorario, formato dal segmento L_1 congiungente i punti $\pm 1 - i$ e dall'arco di circonferenza $L_2 = \{z(t) = \sqrt{2}e^{it},\ \ -\pi/4 \le t \le 5\pi/4\}$.

[punteggio 5]

Posto $C = L_1 \cup L_2$ con

$$L_1 = \{z(t) = t - i,\ \ -1 \le t \le 1\},$$
$$L_2 = \{z(t) = \sqrt{2}e^{it},\ \ -\pi/4 \le t \le 5\pi/4\},$$

si ha

$$\int_C \frac{1}{\bar{z}}\,dz = \int_{L_1} \frac{1}{\bar{z}}\,dz + \int_{C_R} \frac{1}{\bar{z}}\,dz$$

In base alla definizione di integrale

$$\int_{L_1} \frac{1}{\bar{z}}\,dz = \int_{-1}^{1} \frac{1}{t+i}dt = \log(1+i) - \log(-1+i) = -i\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{L_2} \frac{1}{\bar{z}}\,dz = \int_{-\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{\sqrt{2}e^{-it}} i\sqrt{2}e^{it}dt = \frac{1}{2}e^{i5\pi/2} - \frac{1}{2}e^{-i\pi/2} = i$$

In conclusione

$$\int_C \frac{1}{\bar{z}}\,dz = i(1 - \frac{\pi}{2})$$

Esercizio 4 Determinare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 0$ della funzione $\arctan z$ e il corrispondente raggio di convergenza.

[punteggio 5]

Si ha

$$\frac{d}{dz}\arctan z = \frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-z^2\right)^n \qquad |z| < 1$$

e quindi integrando termine a termine

$$\arctan z = \int_0^z \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n w^{2n} dw = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad |z| < 1$$

Il raggio di convergenza è evidentemente $R = 1$. Allo stesso risultato si giunge con la formula di Hadamard

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$$

dove

$$a_n = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2}/n & n \text{ dispari} \\ 0 & n \text{ pari} \end{cases}$$

è il coefficiente della serie riscritta nella forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Esercizio 5 Determinare la derivata quarta, $f^{(4)}(0)$, in $z = 0$ della funzione

$$f(z) = \frac{1}{\cos z}$$

[punteggio 6]

La funzione $f(z)$ è analitica per $|z| < \pi/2$ e in tale disco è sviluppabile in serie di Maclaurin

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k.$$

D'altro canto utilizzando lo sviluppo notevole di $\cos z$ intorno a $z = 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \ldots} \\ &= 1 - \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \ldots \right) + \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \ldots \right)^2 - \left(-\frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} + \ldots \right)^3 + \ldots \\ &= 1 + \frac{1}{2} z^2 + \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} \right) z^4 + \ldots \end{aligned}$$

Per l'unicità dello sviluppo in serie di Taylor, si ha

$$f^{(4)}(0) = \left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{4} \right) 4! = 5.$$

Esercizio 6 Si determini la natura della singolarità in $z = 0$ delle seguenti funzioni e, se il caso, il valore del corrispondente residuo

$$(a)\ \frac{\exp(\sin z)}{z^2} \qquad (b)\ \frac{\sin z}{\log(\cos z)}$$

Per il logaritmo si assuma il ramo principale.

[punteggio 6]

(a) Ricordando gli sviluppi di Maclaurin di $\exp z$ e $\sin z$, si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\exp(\sin z)}{z^2} &= \frac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}\right)^k \\
&= \frac{1}{z^2}\left[1+\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\dots\right)+\frac{1}{2}\left(z-\frac{z^3}{6}+\frac{z^5}{120}+\dots\right)^2+\dots\right] \\
&= \frac{1}{z^2}+\frac{1}{z}+\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)z+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{24}\right)z^2+\dots
\end{aligned}$$

Pertanto la singolarità è un polo doppio e

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\exp(\sin z)}{z^2} = 1$$

(a) Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\log(1+z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \qquad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{(2n)!}z^{2n} \qquad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}$$

e osservando che $\log(\cos z)$ è analitica in un intorno di $z = 0$, si ha

$$\begin{aligned}
\log(\cos z) &= \log(1+(\cos z-1)) \\
&= \left(-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\dots\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2}+\frac{z^4}{24}+\dots\right)^2+\dots \\
&= -\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{12}-\frac{z^6}{45}+\dots
\end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned}
\frac{\sin z}{\log(\cos z)} &= \frac{z-\frac{z^3}{6}+\dots}{-\frac{z^2}{2}\left(1+\frac{z^2}{6}+\frac{2z^4}{45}\dots\right)} \\
&= -\frac{2}{z^2}\left(z-\frac{z^3}{6}+\dots\right)\left[1-\left(\frac{z^2}{6}+\frac{2z^4}{45}+\dots\right)+\dots\right] \\
&= -\frac{2}{z}+\frac{2z}{3}+\dots
\end{aligned}$$

Pertanto la singolarità è un polo semplice e

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{\sin z}{\log(\cos z)} = -2$$

In dettaglio, la funzione $\log(\cos z)$ è analitica in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti $z(t)$ tale che $\cos(z(t)) = -t$ con $t \in [0, \infty)$. Posto $w(t) = \exp(iz(t))$, si ha

$$w(t) = \begin{cases} -t \pm i\sqrt{1-t^2} & t \in [0,1) \\ -t \pm \sqrt{t^2-1} & t \in [1,\infty) \end{cases}$$

Per $t \in [0, 1)$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -i \log\left(-t \pm i\sqrt{1-t^2}\right) \\ &= -i\left(\ln\sqrt{t^2 + (1-t^2)} + i(\varphi(t) + 2k\pi)\right) \\ &= \varphi(t) + 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

dove $\pi/2 \le \varphi(t) \le 3\pi/2$ ($\cos\varphi$ negativo e $\sin\varphi$ positivo o negativo), cioè i segmenti dell'asse reale $[(2k + 1/2)\pi, (2k + 3/2)\pi]$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Per $t \in [1, \infty)$, si ha

$$\begin{aligned} z(t) &= -i \log\left(-t \pm \sqrt{t^2-1}\right) \\ &= -i\left(\ln\left(t \mp \sqrt{t^2-1}\right) + i(\pi + 2k\pi)\right) \\ &= (2k+1)\pi - i\ln\left(t \mp \sqrt{t^2-1}\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

che rappresentano gli assi immaginari passanti per $z = (2k + 1)\pi$ con $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

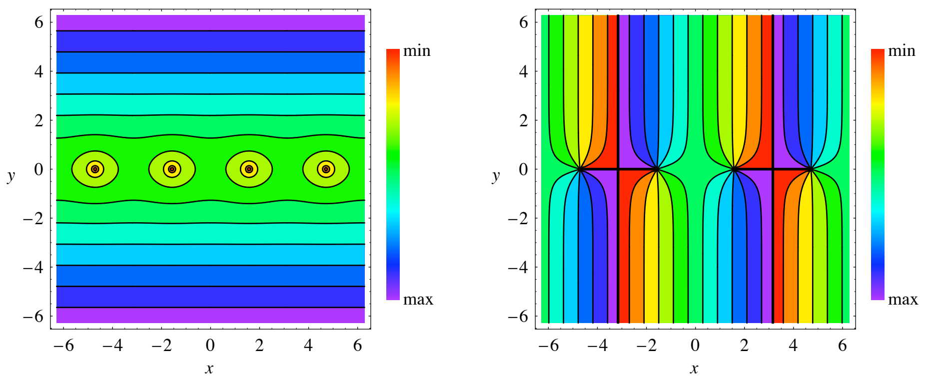

Figure 1: Grafici di livello della parte reale (sinistra) e della parte immaginaria (destra) di $\log(\cos z)$ con $z = x + iy$.

COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2006/2007 – Prof. C. Presilla

Prova finale 29 marzo 2007

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	

Esercizio 1 Determinare il numero di zeri dell'equazione

$$z^8 + 4z^5 - z^2 + 1 = 0$$

nella regione $|z| < 1$.

[punteggio 10]

Posto $f(z) = 4z^5$ e $g(z) = z^8 - z^2 + 1$ il problema è quello di trovare il numero di zeri di $f(z) + g(z) = 0$ nella regione $|z| < 1$. Sul bordo di questa regione, cioé per $|z| = 1$, si ha

$$|f(z)| = 4$$
$$|g(z)| = \left|z^8 - z^2 + 1\right| \leq \left|z^8\right| + \left|-z^2\right| + |1| = 3$$

pertanto $|f(z)| > |g(z)|$ per $|z| = 1$. Per il teorema di Rouché, f e $f + g$ hanno allora lo stesso numero di zeri nella regione $|z| < 1$. Poiché $f(z)$ ha uno zero di ordine 5 in $z = 0$, l'equazione considerata ha 5 zeri in $|z| < 1$.

Esercizio 2 Calcolare il valore del seguente integrale di Bromwich

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R} e^{zt}\frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)}dz \qquad z_0\neq z_1\in\mathbb{C},\ t>0$$

dove $L_R=\{z(y)=a+iy,\ -R\leq y\leq R,\ a>\operatorname{Re}z_0,\ a>\operatorname{Re}z_1\}$.

[punteggio 12]

Si ponga $f(z)=(z-z_0)^{-1}(z-z_1)^{-1}$. Detto $C=L_R\cup C_R$ il cammino di integrazione chiuso dove $C_R=\{z(\theta)=a+Re^{i\theta},\ \pi/2\leq\theta\leq 3\pi/2\}$, per $z_0\neq z_1$ la funzione $f(z)e^{zt}$ è analitica su e dentro C ad eccezione dei poli semplici in $z=z_0$ e $z=z_1$. Per il teorema dei residui

$$\begin{aligned}\int_C e^{zt}f(z)dz &= \int_{L_R}e^{zt}f(z)dz+\int_{C_R}e^{zt}f(z)dz\\ &= 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_0}e^{zt}f(z)+\operatorname*{Res}_{z=z_1}e^{zt}f(z)\right)\end{aligned}$$

Si osservi che in un intorno di z_0 si ha

$$\begin{aligned}e^{zt}f(z) &= \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{z_0-z_1}\,\frac{1}{1+\frac{z-z_0}{z_0-z_1}}\ e^{z_0t}e^{(z-z_0)t}\\ &= \frac{1}{z-z_0}\,\frac{1}{z_0-z_1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{z-z_0}{z_0-z_1}\right)^k e^{z_0t}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{((z-z_0)t)^n}{n!}\end{aligned}$$

e quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0}e^{zt}f(z)=\frac{e^{z_0t}}{z_0-z_1}.$$

Scambiando z_0 con z_1

$$\operatorname*{Res}_{z=z_1}e^{zt}f(z)=\frac{e^{z_1t}}{z_1-z_0}.$$

Per l'integrale su C_R, usando la disugualianza di Darboux e quella di Jordan, si ottiene

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_R}e^{zt}f(z)dz\right| &\leq \int_{\pi/2}^{3\pi/2}\frac{e^{(a+R\cos\theta)t}}{(R+|z_0|)(R+|z_1|)}Rd\theta\\ &= \frac{Re^{at}}{(R+|z_0|)(R+|z_1|)}\int_0^{\pi}e^{-Rt\sin\varphi}d\varphi\\ &\leq \frac{Re^{at}}{(R+|z_0|)(R+|z_1|)}\,\frac{\pi}{Rt}\end{aligned}$$

e quindi

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}e^{zt}f(z)dz=0.$$

In conclusione,

$$\frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{L_R}e^{zt}\frac{1}{(z-z_0)(z-z_1)}dz=\frac{e^{z_0t}-e^{z_1t}}{z_0-z_1}.$$

<u>Esercizio 3</u> Sia $f(z)$ meromorfa all'interno di C, cammino chiuso semplice, e analitica e non nulla su C. Detti a_k, $k = 1, \ldots, m$, e b_k, $k = 1, \ldots, n$, gli zeri e i poli di f interni a C di ordine rispettivamente α_k e β_k, dimostrare che

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^{m} \alpha_k - \sum_{k=1}^{n} \beta_k \right), \tag{1}$$

[punteggio 11]

Per il teorema dei residui, si ha

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_k \operatorname*{Res}_{z=z_k} \frac{f'(z)}{f(z)}, \tag{2}$$

dove z_k sono i punti singolari isolati di f'/f interni a C. Mostriamo che tali punti sono poli semplici corrispondenti agli zeri e ai poli di f. Se $f(z)$ ha in a uno zero di ordine α, allora $\exists \rho > 0$ tale che $\forall z \in B(a, \rho)$ si ha $f(z) = (z-a)^\alpha h(z)$ con h analitica e non nulla in a. Pertanto $\forall z \in B(a, \rho)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\alpha(z-a)^{\alpha-1} h(z) + (z-a)^\alpha h'(z)}{(z-a)^\alpha h(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{h'(z)}{h(z)} \tag{3}$$

Poiché h'/h è analitica in a, la funzione f'/f ha un polo semplice in a con

$$\operatorname*{Res}_{z=a} \frac{f'(z)}{f(z)} = \alpha. \tag{4}$$

Se $f(z)$ ha in b un polo di ordine β, allora $\exists \rho > 0$ tale che $\forall z \in B(b, \rho)$ si ha $f(z) = (z-b)^{-\beta} h(z)$ con h analitica e non nulla in b. Pertanto $\forall z \in B(b, \rho)$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-\beta(z-b)^{-\beta-1} h(z) + (z-b)^{-\beta} h'(z)}{(z-b)^{-\beta} h(z)} = -\frac{\beta}{z-b} + \frac{h'(z)}{h(z)} \tag{5}$$

Poiché h'/h è analitica in b, la funzione f'/f ha un polo semplice in b con

$$\operatorname*{Res}_{z=b} \frac{f'(z)}{f(z)} = -\beta. \tag{6}$$