METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 30 gennaio 2003

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Esercizio 1 Calcolare le seguenti quantità:

(a) $\mathrm{Im}\left(i^{37}\right)$ (b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2}{1-3i}\right)$ (c) $\mathrm{Im}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^3\ e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$

[punteggio 9]

(a) $\mathrm{Im}\left(i^{37}\right) = \mathrm{Im}\left(i^{1+4\times 9}\right) = \mathrm{Im}\left(i\ 1^9\right) = 1$

(b) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{2}{1-3i}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{2}{1-3i}\ \dfrac{1+3i}{1+3i}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{2+6i}{1+9}\right) = \dfrac{1}{5}$

(c)
$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{4}}\right) &= \mathrm{Im}\left(\left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^3 e^{i\frac{\pi}{4}}\right)\\ &= -8\mathrm{Im}\left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right) = -4\sqrt{2}\end{aligned}$$

Esercizio 2 Descrivere a parole e disegnare l'insieme dei punti $z \in \mathbb{C}$ che soddisfano le seguenti condizioni:

(a) $7 \geq |z - i + 3| > 5$ (b) $|z - i| = |z + 1|$

[punteggio 6]

(a) Insieme dei punti la cui distanza da $z_0 = -3 + i$ è minore o uguale a 7 e maggiore di 5, ovvero regione anulare di raggio interno 5 e raggio esterno 7 centrata in z_0, inclusa la circonferenza esterna esclusa quella interna.

(b) Insieme dei punti la cui distanza da $z_1 = i$ è uguale alla distanza da $z_2 = -1$, ovvero retta bisettrice dei quadranti secondo e quarto.

Esercizio 3 Calcolare tutti i valori distinti delle seguenti radici e rappresentarli graficamente:

(a) $\sqrt[3]{-8}$ (b) $\sqrt[2]{1-i}$

[punteggio 6]

$$
\begin{aligned}
\text{(a)}\quad \sqrt[3]{-8} &= \left(8e^{i(\pi+2n\pi)}\right)^{1/3} = \sqrt[3]{8}\exp\left(i\frac{\pi}{3}+i\frac{2n\pi}{3}\right), \qquad n=0,1,2 \\
z_0 &= 2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 1+i\sqrt{3} \\
z_1 &= 2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right) = -2 \\
z_2 &= 2\left(\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1-i\sqrt{3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(b)}\quad \sqrt[2]{1-i} &= \left(\sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4}+2n\pi)}\right)^{1/2} = \sqrt[4]{2}\exp\left(-i\frac{\pi}{8}+in\pi\right), \qquad n=0,1 \\
z_0 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}-i\sin\frac{\pi}{8}\right) \\
z_1 &= \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{8}+i\sin\frac{7\pi}{8}\right)
\end{aligned}
$$

Esercizio 4 Supponendo che $|z| < 1$, determinare la seguente maggiorazione:

$$\left|\operatorname{Im}\left(1+2\overline{z}+z^2\right)\right| < \ldots$$

[punteggio 4]

$$\begin{aligned}
\left|\operatorname{Im}\left(1+2\overline{z}+z^2\right)\right| &= \left|\operatorname{Im}\left(2\overline{z}+z^2\right)\right| \\
&\leq \left|2\overline{z}+z^2\right| \\
&\leq |2\overline{z}| + \left|z^2\right| \\
&= 2|z| + |z|^2 \\
&< 2+1=3
\end{aligned}$$

<u>Esercizio 5</u> Dimostrare che, se esiste il limite

$$\lim_{\Delta z \to 0} \mathrm{Re} \left(\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \right)$$

con $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ e $z = x + iy$, allora esistono le derivate parziali u_x e v_y e si ha $u_x = v_y$.

[punteggio 6]

Per l'esistenza del limite in ipotesi, posto $\Delta z = \Delta x$ con $\Delta x \in \mathbb{R}$ deve esistere

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{Re} \left(\frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} \right) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} \\
&= u_x(x, y).
\end{aligned}$$

Analogamente, posto $\Delta z = i\Delta y$ con $\Delta y \in \mathbb{R}$ deve esistere

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta y \to 0} \mathrm{Re} \left(\frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} \right) \\
&= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \\
&= v_y(x, y).
\end{aligned}$$

Per l'unicità del limite in ipotesi segue poi $u_x(x, y) = v_y(x, y)$.

Esercizio 6 Determinare la funzione $v(x,y)$ armonica coniugata alla funzione $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$ nella regione $0 \leq |z| < \infty$ con $z = x + iy$.

[punteggio 8]

Nella regione considerata, v è armonica coniugata di u se e solo se $f = u+iv$ è analitica. Dalle equazioni di Cauchy-Riemann si ha allora

$$v_x(x,y) = -u_y(x,y) = 2y,$$

da cui

$$v(x,y) = 2xy + \Phi(y).$$

Sempre dalle equazioni di Cauchy-Riemann si ha anche

$$v_y(x,y) = u_x(x,y) = 2x + 1,$$

cioé

$$\Phi'(y) = 1$$

che risolta da

$$\Phi(y) - \mathrm{const} = y$$

In conclusione

$$v(x,y) = 2xy + y + \mathrm{const}$$

Si noti che

$$\begin{aligned} f(z) &= x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + \mathrm{const}) \\ &= (x+iy)^2 + (x+iy) + \mathrm{const} \\ &= z^2 + z + \mathrm{const} \end{aligned}$$

Esercizio 7 Determinare la parte reale e immaginaria dei valori assunti dalle seguenti funzioni:

(a) $\cosh(2+i)$ (b) $\operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right)$

[punteggio 6]

$$\begin{aligned}
\text{(a)}\quad \cosh(2+i) &= \frac{e^{2+i}+e^{-2-i}}{2} \\
&= \frac{e^{2}(\cos 1 + i\sin 1) + e^{-2}(\cos 1 - i\sin 1)}{2} \\
&= \cosh 2\cos 1 + i\sinh 2\sin 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(b)}\quad \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{4} - i\ln 2\right) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}+\ln 2}+e^{-i\frac{\pi}{4}-\ln 2}}{2}\,\frac{2i}{e^{i\frac{\pi}{4}+\ln 2}-e^{-i\frac{\pi}{4}-\ln 2}} \\
&= i\frac{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= i\frac{\frac{5}{2\sqrt{2}}+i\frac{3}{2\sqrt{2}}}{\frac{3}{2\sqrt{2}}+i\frac{5}{2\sqrt{2}}} \\
&= i\frac{5+3i}{3+5i} = \frac{-3+5i}{3+5i} \\
&= \frac{(-3+5i)(3-5i)}{9+25} = \frac{8}{17}+i\frac{15}{17}
\end{aligned}$$