METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2004/2005 – Prof. C. Presilla

Prova finale 30 marzo 2005

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2	3

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Esercizio 1 Dimostrare che tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin z = a \qquad -1 \le a \le 1$$

sono reali

[punteggio 4]

Si ha

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = a$$

ovvero

$$e^{2iz} - 2iae^{iz} - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^{iz} = ia \pm \sqrt{1-a^2}$$

Si noti che per $-1 \le a \le 1$ il radicando è non negativo. Pertanto le soluzioni cercate sono

$$\begin{aligned} iz &= \log\left(ia \pm \sqrt{1-a^2}\right) \\ &= \ln\sqrt{a^2 + (1-a^2)} + i\left[\arcsin\left(\frac{a}{a^2+(1-a^2)}\right) + 2\pi k\right] \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

ovvero

$$z = \arcsin a + 2\pi k \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Esercizio 2 Assumendo il ramo principale delle funzioni polidrome, determinare il valore del seguente limite giustificando la risposta

$$\lim_{z\to 0} (\cos z)^{1/z^2}$$

[punteggio 4]

Si osservi che

$$\begin{aligned}
(\cos z)^{1/z^2} &= \exp\left[\frac{1}{z^2}\log(\cos z)\right] \\
&= \exp\left\{\frac{1}{z^2}\log\left[1+\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\right]\right\} \\
&= \exp\left\{\frac{1}{z^2}\left[\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)\right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. -\frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\ldots\right)^2+\ldots\right]\right\} \\
&= \exp\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\ldots\right)
\end{aligned}$$

avendo usato gli sviluppi di Taylor notevoli

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n} \qquad |z|<\infty$$

$$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n \qquad |z|<1$$

Pertanto

$$\lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2} = \lim_{z\to 0}\exp\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}z^2-\frac{1}{45}z^4+\ldots\right) = e^{-1/2}$$

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità del ramo principale della funzione $\arctan z$ e il valore della sua derivata in tale dominio.

[punteggio 5]

Posto $\arctan z = w$ si ha

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}} = iz$$

ovvero

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

e quindi

$$\arctan z = -\frac{i}{2} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

Il ramo principale di questa funzione è analitico in tutto il piano complesso ad eccezione dei punti

$$\frac{1+iz}{1-iz} = -t \qquad t \geq 0$$

ovvero dei punti

$$z(t) = i\frac{1+t}{1-t}$$

Per $t \in [0, 1)$ e $t \in (1, \infty)$, i punti $z(t)$ coincidono, rispettivamente, con le semirette immaginarie $z = \pm ia$ con $a \in [1, \infty)$. All'interno del dominio di analiticità la derivata vale

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} \arctan z &= -\frac{i}{2} \frac{d}{dz} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right) \\
&= -\frac{i}{2} \; \frac{1-iz}{1+iz} \; \frac{i(1-iz) - (1+iz)(-i)}{(1-iz)^2} \\
&= -\frac{i}{2} \; \frac{2i}{(1+iz)(1-iz)} \\
&= \frac{1}{1+z^2}
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia $f(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua sull'intervallo reale $[a,b]$ con $a < b$. Dimostrare che vale la disugualianza

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\, dt$$

[punteggio 4]

Poiché $f(t)$ è continua in $[a,b]$ l'integrale di $f(t)$ tra a e b esiste cioé è un numero complesso diciamo di modulo r_0 e argomento θ_0

$$\int_a^b f(t)dt = r_0 e^{i\theta_0}$$

Risulta allora

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| = r_0 = e^{-i\theta_0} \int_a^b f(t)dt = \int_a^b e^{-i\theta_0} f(t)dt$$

da cui prendendo la parte reale di entrambi i membri

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b f(t)dt \right| &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b e^{-i\theta_0} f(t)dt \right) \\
&= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-i\theta_0} f(t) \right) dt \\
&\leq \int_a^b \left| e^{-i\theta_0} f(t) \right| dt \\
&= \int_a^b |f(t)|\, dt
\end{aligned}$$

avendo usato la disugualianza $\mathrm{Re}\, z \leq |z|$ valida $\forall z \in \mathbb{C}$.

Esercizio 5 Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_C \frac{1}{\sin(z^{-1})}\, dz$$

dove C è la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario.

[punteggio 5]

La funzione $1/\sin(z^{-1})$ è analitica ovunque ad eccezione delle singolarità isolate nei punti $z_n = (n\pi)^{-1}$ con $n = \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$ e della singolarità non isolata in $z = 0$. Dunque la funzione $1/\sin(z^{-1})$ è analitica sul cammino chiuso C e al suo esterno. Per il teorema del residuo all'infinito si ha

$$\int_C \frac{1}{\sin(z^{-1})}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z)}$$

Tale residuo può essere calcolato considerando che per $0 < |z| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots} \\
&= \frac{1}{z^3}\frac{1}{1 - \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)} \\
&= \frac{1}{z^3}\left[1 + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right) + \left(\frac{z^2}{3!} - \frac{z^4}{5!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] \\
&= z^{-3} + \frac{1}{3!}z^{-1} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z + \ldots
\end{aligned}$$

In conclusione

$$\int_C \frac{1}{\sin(z^{-1})}\, dz = 2\pi i \frac{1}{3!} = \frac{\pi}{3} i$$

Esercizio 6 Determinare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 0$ della funzione

$$e^z \sin z$$

[punteggio 4]

Ricordando lo sviluppo notevole

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

si ha

$$\begin{aligned}
e^z \sin z &= e^z \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{1}{2i}\left(e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-i)^n}{n!} z^n\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2} e^{i\pi/4}\right)^n - \left(\sqrt{2} e^{-i\pi/4}\right)^n}{2in!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2} \sin(n\pi/4)}{n!} z^n \\
&= z + z^2 + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} - \frac{z^6}{90} - \frac{z^7}{630} + \dots
\end{aligned}$$

Esercizio 7   Determinare il valore dell'integrale

$$\int_C \left(z^2 - \overline{z}^2\right)\ dz$$

dove C è il cammino rettilineo che va da $z = 1$ a $z = i$.

[punteggio 4]

La funzione integranda è

$$f(z) = z^2 - \overline{z}^2 = 2i \operatorname{Im} z^2$$

e il cammino di integrazione può essere parametrizzato come

$$C = \{z(t) = 1 - t + it,\ 0 \le t \le 1\}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= \int_0^1 2i \operatorname{Im}\left((1-t+it)^2\right)(-1+i)dt \\
&= \int_0^1 2i2(1-t)t(-1+i)dt \\
&= 4i(-1+i)\int_0^1 (t-t^2)dt \\
&= (-4+4i)\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 \\
&= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3}i
\end{aligned}$$

Esercizio 8 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\, dx \qquad -1 < a < 1$$

Suggerimento: si consideri il cammino di integrazione costituito dal rettangolo di vertici $\pm R$ e $\pm R + i\pi$

[punteggio 5]

Posto $f(z) = e^{az}/\cosh z$ e detto $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup L_4$ il cammino chiuso di integrazione con

$$\begin{aligned}
L_1 &= \{z(x) = x,\ -R \le x \le R\} \\
L_2 &= \{z(y) = R + iy,\ 0 \le y \le \pi\} \\
L_3 &= \{z(x) = x + i\pi,\ R \ge x \ge -R\} \\
L_4 &= \{z(y) = -R + iy,\ \pi \ge y \ge 0\}
\end{aligned}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = i\pi/2$ si ha

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\, dz &= \sum_{k=1}^{4} \int_{L_k} f(z)\, dz \\
&= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i\pi/2} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{az}}{\sinh z}\right|_{z=i\pi/2} = 2\pi e^{ia\pi/2}
\end{aligned}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\, dx$$

$$\int_{L_3} f(z)\, dz = \int_{R}^{-R} \frac{e^{a(x+i\pi)}}{\cosh(x+i\pi)}\, dx = e^{ia\pi} \int_{-R}^{R} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\, dx$$

avendo usato la proprietà di antiperiodicità $\cosh(x + i\pi) = -\cosh x$

$$\left| \int_{L_2} f(z)\, dz \right| \le \pi\ \frac{e^{aR}}{\frac{1}{2}\,(e^R - 1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{per } a < 1$$

$$\left| \int_{L_4} f(z)\, dz \right| \le \pi\ \frac{e^{-aR}}{\frac{1}{2}\,(e^R - 1)} \xrightarrow{R\to\infty} 0 \qquad \text{per } a > -1$$

In conclusione nel limite $R \to \infty$ per $-1 < a < 1$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{\cosh x}\, dx = \frac{2\pi e^{ia\pi/2}}{1 + e^{ia\pi}} = \pi \sec(a\pi/2)$$