METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova finale 31 marzo 2006

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinere (segnare)	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare il valore della parte immaginaria del ramo principale di

$$\arctan(1+2i)$$

[punteggio 5]

Posto $w = \arctan(z)$, si ha $\tan w = z$ ovvero

$$iz = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$$

che risolta rispetto a e^{2iw} fornisce

$$e^{2iw} = \frac{1+iz}{1-iz}$$

e quindi

$$w = \frac{1}{2i} \log \frac{1+iz}{1-iz}$$

Si ha allora

$$\begin{aligned}
\arctan(1+2i) &= -\frac{i}{2} \log \frac{1+i-2}{1-i+2} \\
&= -\frac{i}{2} \log \frac{-2+i}{5} \\
&= -\frac{i}{2} \log \left(\frac{1}{\sqrt{5}} e^{i\varphi} \right) \\
&= -\frac{i}{2} \left(\ln \frac{1}{\sqrt{5}} + i\varphi \right) \\
&= \frac{\varphi}{2} + \frac{i}{4} \ln 5
\end{aligned}$$

dove φ è definito da $\cos\varphi = -2/\sqrt{5}$ e $\sin\varphi = 1/\sqrt{5}$. In conclusione

$$\operatorname{Im}\left(\arctan(1+2i)\right) = \frac{1}{4} \ln 5$$

Esercizio 2 Determinare il raggio di convergenza delle seguenti serie di potenze

$$(a) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \pi^n [(1-(-1)^n)/2] z^n \qquad (b) \quad \sum_{n=0}^{\infty} n^{2+i} \pi^n z^n$$

[punteggio 6]

(a) Il coefficiente n-esimo della serie riscritta in forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ è

$$a_n = \begin{cases} n^2\pi^n & \text{se } n \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

Si ha quindi

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sup_{k\geq n} \left\{ |a_k|^{1/k} \right\} = \lim_{n\to\infty} n^{2/n}\pi = \pi$$

cioè $R = 1/\pi$

(b) Il coefficiente n-esimo della serie è $a_n = n^{2+i}\pi^n$ e si ha

$$\left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \frac{n^2\pi^n}{(n+1)^2\pi^{n+1}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{\pi}$$

Il raggio di convergenza della serie è $R = 1/\pi$.

Esercizio 3 Determinare il valore dell'integrale

$$\int_{C_R} \frac{\log z}{z^2}\, dz$$

dove C_R è la circonferenza di raggio R centrata in $z = 0$ e percorsa in verso antiorario e $\log z$ è il ramo principale del logaritmo.

[punteggio 5]

La funzione integranda

$$\frac{\log z}{z^2} = \frac{\ln|z| + i \arg z}{z^2} \qquad |z| > 0 \qquad -\pi \leq \arg z < \pi$$

è continua su tutto C_R ad eccezione del punto $z = -R$. Conviene parametrizzare il cammino di integrazione come

$$C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta}, \; -\pi \leq \theta \leq \pi\}$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} \frac{\log z}{z^2}\, dz &= \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\ln R + i\theta}{R^2 e^{2i\theta}}\, Re^{i\theta} i d\theta \\
&= i\frac{\ln R}{R} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{-i\theta} d\theta - \frac{1}{R}\int_{-\pi}^{+\pi} \theta e^{-i\theta} d\theta \\
&= i\frac{\ln R}{R} \left[\frac{e^{-i\theta}}{-i}\right]_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{R}\left[e^{-i\theta}(1 + i\theta)\right]_{-\pi}^{+\pi} \\
&= -\frac{\ln R}{R}\left[e^{-i\pi} - e^{i\pi}\right] - \frac{1}{R}\left[e^{-i\pi}(1 + i\pi) - e^{i\pi}(1 - i\pi)\right] \\
&= 0 - \frac{1}{R}(-1 - i\pi + 1 - i\pi) \\
&= \frac{2\pi i}{R}
\end{aligned}$$

Alternativamente, si osservi che per $z \in C_{R,\varepsilon}$ con

$$C_{R,\varepsilon} = \{z(\theta) = Re^{i\theta}, \; -(\pi - \varepsilon) \leq \theta \leq (\pi - \varepsilon)\} \qquad \varepsilon > 0$$

la funzione $z^{-2}\log z$ ammette la primitiva $z^{-1}(-1 - \log z)$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_{C_R} \frac{\log z}{z^2}\, dz &= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_{R,\varepsilon}} \frac{\log z}{z^2}\, dz \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\frac{-1 - \log z}{z}\right]_{Re^{-i(\pi-\varepsilon)}}^{Re^{i(\pi-\varepsilon)}} \\
&= \frac{-1 - (\ln R + i\pi)}{-R} - \frac{-1 - (\ln R - i\pi)}{-R} \\
&= \frac{2\pi i}{R}
\end{aligned}$$

<u>Esercizio 4</u> Determinare lo sviluppo in serie di Taylor intorno al punto $z_0 = 0$ della funzione

$$e^{iz} \sinh z$$

[punteggio 5]

Ricordando lo sviluppo notevole

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

si ha

$$\begin{aligned}
e^{iz} \sinh z &= e^{iz} \frac{e^z - e^{-z}}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left(e^{(1+i)z} - e^{(-1+i)z} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i)^n}{n!} z^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1+i)^n}{n!} z^n \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2} e^{i\pi/4}\right)^n - \left(\sqrt{2} e^{i3\pi/4}\right)^n}{2n!} z^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{n/2-1} \left[\cos(n\pi/4) + i \sin(n\pi/4)\right] (1 - i^n)}{n!} z^n \\
&= z + iz^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{30} - \frac{iz^6}{90} + \frac{z^7}{630} + \dots
\end{aligned}$$

Esercizio 5 Determinare il valore del seguente integrale

$$\int_C \frac{1}{\sin(z^{-2})}\, dz$$

dove C è la circonferenza di raggio unitario centrata nell'origine e percorsa in verso antiorario.

[punteggio 6]

La funzione $1/\sin(z^{-2})$ è analitica ovunque ad eccezione delle singolarità isolate nei punti

$$z_{n,k} = \frac{e^{i\pi k}}{\sqrt{n\pi}} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad k = 0, 1,$$

e della singolarità non isolata in $z = 0$. Dunque la funzione $1/\sin(z^{-2})$ è analitica sul cammino chiuso C e al suo esterno. Per il teorema del residuo all'infinito si ha

$$\int_C \frac{1}{\sin(z^{-2})}\, dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} \frac{1}{\sin(z^2)}$$

Tale residuo può essere calcolato considerando che per $0 < |z| < \infty$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z^2)} &= \frac{1}{z^2}\frac{1}{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \ldots} \\
&= \frac{1}{z^4}\frac{1}{1 - \left(\frac{z^4}{3!} - \frac{z^8}{5!} + \ldots\right)} \\
&= \frac{1}{z^4}\left[1 + \left(\frac{z^4}{3!} - \frac{z^8}{5!} + \ldots\right) + \left(\frac{z^4}{3!} - \frac{z^8}{5!} + \ldots\right)^2 + \ldots\right] \\
&= z^{-4} + \frac{1}{3!} + \left(-\frac{1}{5!} + \frac{1}{(3!)^2}\right) z^4 + \ldots
\end{aligned}$$

Si ha quindi

$$\operatorname*{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2}\frac{1}{\sin(z^2)} = 0$$

e, in conclusione,

$$\int_C \frac{1}{\sin(z^{-2})}\, dz = 0$$

Esercizio 6 Si supponga che la funzione $f(z) : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ abbia un polo di ordine m in z_0. Dimostrare che

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

[punteggio 6]

Poiché $f(z)$ ha un polo di ordine m in z_0, esiste un $\varepsilon > 0$ tale che per $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ vale lo sviluppo in serie di Laurent

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \ldots + \frac{b_m}{(z-z_0)^m}$$

con $b_m \neq 0$. Pertanto

$$(z-z_0)^m f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k+m} + b_1 (z-z_0)^{m-1} + b_2 (z-z_0)^{m-2} + \ldots + b_m$$

Derivando questa espressione, membro a membro, $m-1$ volte rispetto a z, si ha

$$\begin{aligned}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+m)(k+m-1)\ldots(k+2)(z-z_0)^{k+1} \\ &\quad + b_1 (m-1)(m-2)\ldots 1\end{aligned}$$

da cui, divendo per $(m-1)!$ e prendendo il limite $z \to z_0$, segue l'asserto

$$\lim_{z\to z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-z_0)^m f(z)\right] = b_1 = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$$

COMPLEMENTI DI METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2005/2006 – Prof. C. Presilla

Prova finale 31 marzo 2006

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	

Esercizio 1 La funzione $u : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definita da

$$u(x, y) = e^{-2xy} \sin(x^2 - y^2)$$

è armonica in $\mathbb{R}^2$. Determinare la funzione $v(x, y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ armonica coniugata alla $u(x, y)$ in $\mathbb{R}^2$.

[punteggio 10]

La funzione v è armonica coniugata a u in $\mathbb{R}^2$ se e solo se la funzione $f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ è analitica in $\mathbb{C}$. Oservando che

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

e che dunque

$$e^{iz^2} = e^{-2xy} \left[\cos(x^2 - y^2) + i \sin(x^2 - y^2)\right]$$

si ricava

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) \qquad f(z) = -ie^{iz^2}$$

con $f(z)$ intera. Pertanto, a meno di una arbitraria costante,

$$v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = -e^{-2xy} \cos(x^2 - y^2)$$

Esercizio 2 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\ dx$$

[punteggio 11]

Si osservi, per iniziare, che l'integrale improprio esiste e si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\ dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\ dx$$

Posto $f(z) = z/(z^2+2z+5)$ e detto $C = L_R \cup C_R$ il cammino di integrazione chiuso dove $L_R = \{z(x) = x,\ -R \le x \le R\}$ e $C_R = \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le \pi\}$, per $R > \sqrt{5}$ la funzione $f(z)e^{i\pi z}$ è analitica su e dentro C ad eccezione del polo semplice in $z = -1+2i$. Per il teorema dei residui

$$\begin{aligned}\int_C f(z)e^{i\pi z}\ dz &= \int_{L_R} f(z)e^{i\pi z}\ dz + \int_{C_R} f(z)e^{i\pi z}\ dz\\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-1+2i} f(z)e^{i\pi z}\\ &= \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}\end{aligned}$$

Per $z \in C_R$, risulta $|f(z)| \le R/(R^2-2R-5)$ infinitesimo per $R\to\infty$ e quindi per il lemma di Jordan

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)e^{i\pi z}\ dz = 0$$

Inoltre

$$\int_{L_R} f(z)e^{i\pi z}\ dz = \int_{-R}^{+R}\frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5}\ dx$$

quindi nel limite $R\to\infty$ si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xe^{i\pi x}}{x^2+2x+5}\ dx = \frac{\pi}{2}(1-2i)e^{-2\pi}$$

da cui prendendo la parte immaginaria

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2+2x+5}\ dx = -\pi e^{-2\pi}$$

Esercizio 3 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n+1}}\ dx \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

[punteggio 12]

Si consideri $f(z) = 1/(1+z^{2n+1})$ analitica in tutto $\mathbb{C}$ ad eccezione dei $2n+1$ poli semplici in

$$z_k = e^{i\pi/(2n+1)+i2\pi k/(2n+1)} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$$

Detto $C = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ il cammino chiuso di integrazione con

$$\begin{aligned} L_1 &= \{z(x) = x,\ 0 \le x \le R\} \\ L_2 &= \{z(\theta) = Re^{i\theta},\ 0 \le \theta \le 2\pi/(2n+1)\} \\ L_3 &= \{z(x) = xe^{i2\pi/(2n+1)},\ R \ge x \ge 0\} \end{aligned}$$

poiché $f(z)$ è analitica su e dentro C, per $R > 1$, ad eccezione del polo semplice in $z = z_0$, si ha

$$\int_C f(z)\ dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{L_k} f(z)\ dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = 2\pi i \frac{1}{(2n+1)z_0^{2n}}$$

Per i singoli cammini di integrazione si ha

$$\int_{L_1} f(z)\ dz = \int_0^R \frac{1}{1+x^{2n+1}}\ dx$$

$$\left| \int_{L_2} f(z)\ dz \right| \le \frac{2\pi R}{2n+1}\ \frac{1}{R^{2n+1}-1} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

$$\int_{L_3} f(z)\ dz = -e^{i2\pi/(2n+1)} \int_0^R \frac{1}{1+x^{2n+1}}\ dx$$

In conclusione nel limite $R \to \infty$ si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^{2n+1}}\ dx &= \frac{2\pi i/(2n+1)}{e^{i2n\pi/(2n+1)}} \frac{1}{1-e^{i2\pi/(2n+1)}} \\ &= \frac{2\pi i/(2n+1)}{e^{i2n\pi/(2n+1)}} \frac{1}{\left[e^{-i\pi/(2n+1)} - e^{i\pi/(2n+1)}\right] e^{i\pi/(2n+1)}} \\ &= \frac{\pi/(2n+1)}{\sin[\pi/(2n+1)]} \end{aligned}$$

k