MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova finale 3 luglio 2003

Cognome	
Nome	

in sostituzione delle prove in itinire (segnare)	1	2	3

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Esercizio 1 Si considerino i vettori $e^{(n)} \in \ell_\infty$ di componenti $e_k^{(n)} = \delta_{k,n}$. Dimostrare che l'insieme $\left(e^{(n)}\right)_{n=1}^{\infty}$ è non completo nello spazio vettoriale $\ell_\infty := \{x \in \mathbb{R}^\infty : ||x||_\infty = \sup_k |x_k| < \infty\}$.

[punteggio 4]

Esercizio 2 Dimostrare che $v_1(x) = \sin x$, $v_2(x) = \cos x$ e $v_3(x) = e^{2ix}$ sono vettori linearmente indipendenti in $C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, spazio vettoriale delle funzioni continue in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{C}$.

[punteggio 4]

<u>Esercizio 3</u> Determinare per quali valori della costante $c \in \mathbb{R}$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} (c x_k y_k + x_k y_{k+1} + x_{k+1} y_k)$$

risulta essere un prodotto scalare in $\ell_2 := \Big\{ x \in \mathbb{R}^\infty : ||x||_2 = \big(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \big)^{1/2} < \infty \Big\}$.

[punteggio 4]

<u>Esercizio 4</u> Dopo aver ortogonalizzato i vettori $v_1(x) = x$ e $v_2(x) = x^3$ nello spazio euclideo $C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$, determinare la proiezione ortogonale $(\pi_W h)(x)$ con $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$ e $h(x) = x^2$.

[punteggio 4]

Esercizio 5 Determinare la derivata della distribuzione regolare φ_g associata alla funzione

$$g(x) = \sin(x)e^{-x^2}\,[\theta(x-1) - \theta(x-2)]$$

[punteggio 4]

Esercizio 6 Determinare la norma del funzionale lineare δ_π (delta di Dirac in $x = \pi$) nello spazio vettoriale normato $(C_0(\mathbb{R}, ||\cdot||_u)$.

[punteggio 4]

Esercizio 7 Sviluppare la funzione $f(x) = \sinh x$ in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

[punteggio 4]

Esercizio 8 Senza giustificare la scelta, dire se le seguenti affermazioni sono vere $\boxed{\text{V}}$ o false $\boxed{\text{F}}$

(a) L'insieme $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 2x_2 = 3x_3\}$ è uno spazio vettoriale su campo reale. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) La funzione $||x|| = |x_1| + |2x_2|$ è una norma nello spazio vettoriale $L = \mathbb{R}^3$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) La funzione $||f|| = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ è una norma nello spazio vettoriale $L = C_0(\mathbb{R})$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) Lo spazio vettoriale normato $(L, || \cdot ||)$ ammette un prodotto scalare $\langle x, x \rangle = ||x||^2$ se e solo se vale $||x+y||^2 + ||x-y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$ per ogni $x, y \in L$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) Per la distribuzione δ di Dirac si ha $x^2 \delta_0^{(2)} = 0$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(f) Il prodotto di una distribuzione regolare per una funzione C^∞ è ancora una distribuzione regolare. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(g) Per un operatore lineare autoaggiunto gli autovettori corrispondenti ad autovalori differenti sono ortogonali. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(h) Gli operatori lineari compatti e autoaggiunti hanno spettro continuo sempre vuoto. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[punteggio 8]