Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Esonero 2

Cesi/Presilla – A.A. 2006–07

Canale[1]	Cesi	Presilla

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

[1] Chi segue le lezioni indica il canale che sta seguendo. Chi non segue indica Presilla se è di "Fisica" e Cesi se di "Astrofisica"

(1) (6 pt). Dire se F è un funzionale lineare continuo sullo spazio vettoriale indicato. Rispondere semplicemente sì o no.

(a) $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$. $F(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i/i$ $\boxed{S}\,\boxed{N}$

(b) $(C_{5/4}(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{5/4})$. $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{4+|x|^{1/3}}\, dx$ $\boxed{S}\,\boxed{N}$

(c) $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$. $F(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} f(x)\, dx$ $\boxed{S}\,\boxed{N}$

(d) $(C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$. $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+1)}{5+(x-3)^2}\, dx$ $\boxed{S}\,\boxed{N}$

(e) $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$. $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\log(7+x^8)}\, dx$ $\boxed{S}\,\boxed{N}$

(f) $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$. $F(f) = \int_3^8 f(x)\, dx$ $\boxed{S}\,\boxed{N}$

Soluzione.

(a) No. Si prenda $x_i = 1$.
(b) Sì. Per dimostrare che l'integrale è finito si può usare Hölder.
(c) Sì.
(d) Sì.
(e) No. Con $f(x) = (1+\sqrt{|x|})^{-1}$ l'integrale diverge.
(f) Sì.

(2) (3 pt). Dato un intero positivo n, esprimere la distribuzione $x^{n-1}\,\delta_0^{(n)}$ come combinazione lineare di δ_0 e delle sue derivate.

Soluzione. Usando la formula generale per l'espansione di $h(x)\delta_0^{(n)}$ si ottiene

$$x^{n-1}\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} D^k(x^{n-1})(0)\,\delta_0^{(n-k)}\,.$$

L'unico termine diverso da zero è quello con $k = n-1$, quindi

$$x^{n-1}\delta_0^{(n)} = (-1)^{n-1} n(n-1)!\,\delta_0' = (-1)^{n-1} n!\,\delta_0'\,.$$

(3) (5 pt). Nello spazio vettoriale $P[0,\infty)$ (i polinomi su $[0,\infty)$) consideriamo il prodotto scalare $\langle f, g\rangle := \int_0^\infty f(x)g(x)\,e^{-x}\,dx$. Sia $W := \operatorname{span}\{1, x\}$. Determinare la proiezione ortogonale $\pi_W(x^n)$, in cui n è un intero positivo arbitrario. Si verifichi che, quando $n=1$, si ottiene $\pi_W x = \cdots$, come era lecito aspettarsi. (Ricorda: $\int_0^\infty x^n\,e^{-x}\,dx = n!$).

Soluzione. Utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt trovo una base ortogonale $\{w_1, w_2\}$ di W

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= 1 \\
\|w_1\|^2 &= \int_0^\infty |1|^2\,e^{-x}\,dx = 1 \\
w_2(x) &= x - \frac{\langle x, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\,w_1(x) = x - \int_0^\infty x\,e^{-x}\,dx = x - 1 \\
\|w_2\|^2 &= \int_0^\infty (x-1)^2\,e^{-x}\,dx = 1\,.
\end{aligned}$$

A questo punto uso la formula esplicita della proiezione ortogonale su W

$$\pi_W(u) = \sum_k \frac{\langle u, w_k\rangle}{\|w_k\|^2}\,w_k\,,$$

che mi dà

$$
\begin{aligned}
\pi_w(x^n) &= \frac{\langle x^n, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1(x) + \frac{\langle x_n, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2(x) \\
&= \int_0^\infty x^n\, e^{-x}\, dx + \left(\int_0^\infty x^n\,(x-1)\, e^{-x}\, dx\right)\,(x-1) \\
&= n! + [(n+1)! - n!](x-1) = n! + n!\, n\,(x-1) \\
&= n!\,\big[1 - n + nx\big]\,.
\end{aligned}
$$

Scegliendo n uguale a 0 o 1 si verifica che $\pi_W(1) = 1$ e $\pi_W(x) = x$.

(4) (3 pt). Dimostrare la seguente affermazione (Riesz–Fisher): Sia $(u_k)_{k=1}^\infty$ un sistema ortonormale nello spazio di Hilbert V. Allora per ogni $c = (c_k)_{k=1}^\infty \in \ell_2$ esiste $v \in V$ tale che $c_k = \langle v, u_k\rangle$ per ogni k.

Soluzione. Vedi sui "Rudimenti".

(5) (8 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x\rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$
(a)\;\; e^{-x^2}\,|x|'''' \qquad (b)\;\; D[\operatorname{sgn}(x-1)\,\operatorname{sgn}(x+1)] \qquad (c)\;\; x\,D^2(\log|x|) \qquad (d)\;\; D\big(e^x\lfloor x\rfloor\big)
$$

Soluzione.

(a)

$$
\begin{aligned}
e^{-x^2}\,|x|'''' &= e^{-x^2}\, D^3(\operatorname{sgn} x) = 2\, e^{-x^2}\,\delta_0'' \\
&= 2\,\Big[\delta_0'' - 2\big(e^{-x^2}\big)'(0)\,\delta_0' + \big(e^{-x^2}\big)''(0)\,\delta_0\Big] \\
&= 2\,\Big[\delta_0'' - 2\big((-2x)\,e^{-x^2}\big)(0)\,\delta_0' + \big(e^{-x^2}(4x^2-2)\big)(0)\,\delta_0\Big] \\
&= 2\,\delta_0'' - 4\,\delta_0\,.
\end{aligned}
$$

(b) La funzione da derivare è costante ad eccezione die punti $x = -1$ e $x = 1$ in cui si hanno salti pari rispettivamente a -2 e $+2$. Quindi

$$
D[\operatorname{sgn}(x-1)\,\operatorname{sgn}(x+1)] = -2\delta_{-1} + 2\,\delta_1\,.
$$

(c)

$$
x\,D^2(\log|x|) = xDP(1/x) = D\,[xP(1/x)] - D[x]\,P(1/x) = -P(1/x)\,.
$$

(d)

$$
D\big(e^x\lfloor x\rfloor\big) = D(e^x)\lfloor x\rfloor + e^x\,D(\lfloor x\rfloor) = e^x\,\lfloor x\rfloor + e^x\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = e^x\,\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^k\,\delta_k\,.
$$

(6) (3 pt). Dimostrare la seguente affermazione se è vera o trovare un controesempio se è falsa: sia F un funzionale lineare sulla spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$. Se F è limitato allora F è continuo.

Soluzione. Vero. Vedi sui "Rudimenti".

(7) (2 pt). Fare un esempio concreto di uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ e di un funzionale lineare F su V non limitato.

Soluzione. Si consideri lo spazio vettoriale normato $(C_1(\mathbb{R}), \|\cdot\|_1)$. Sia $F = \delta_0$, cioè

$$
F(f) := f(0) \qquad f \in C_1(\mathbb{R})\,.
$$

Si verifica facilmente che F è lineare. Inoltre F non è limitato. Sia infatti (ad esempio)

$$\gamma_n(x) = \frac{ne^{-n^2x^2}}{\sqrt{\pi}}\,.$$

Allora $\|\gamma_n\|_1 = 1$, per cui

$$\frac{|F(\gamma_n)|}{\|\gamma_n\|_1} = |F(\gamma_n)| = \gamma_n(0) = n/\sqrt{\pi} \to +\infty$$

(8) (4 pt). Sia W un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile[2] V. Dato $v \in V$, sia $w := \pi_W v$ la proiezione ortogonale di v su W. Dimostrare che w è, fra tutti gli elementi di W, il più vicino a v (rispetto alla distanza associata alla norma).

Soluzione. Grazie al teorema della proiezione posso scrivere v come

$$v = w + z \qquad w \in W,\, z \in W^\perp\,.$$

Sia ora w' un elemento arbitrario di W. La distanza (al quadrato) di v da w' è data da

$$\begin{aligned}
\|v - w'\|^2 &= \|z + w - w'\|^2 \\
&= \langle z + (w - w'), z + (w - w')\rangle \\
&= \|z\|^2 + \|w - w'\|^2 + \langle z, w - w'\rangle + \langle w - w', z\rangle \\
&= \|z\|^2 + \|w - w'\|^2 = \|v - w\|^2 + \|w - w'\|^2\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che

$$\|v - w'\|^2 \geq \|v - w\|^2 \qquad \forall w' \in W\,,$$

e che si può avere l'uguaglianza solo se $w = w'$.

[2] questa ipotesi in realtà non è necessaria