Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 1

Cesi/Presilla – A.A. 2005–06

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

(1) (1 pt). Cerchiare “Cesi” o “Presilla”, a seconda del canale di appartenenza, sul frontespizio del compito.

(2) (4 pt). Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(1) $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + |x_1 + x_2 + x_3|$.
(2) $V = \ell_2$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{\sqrt{k}}$.
(3) $V = C^1[-1,1]$ e $\|f\| = |f(0)| + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$
(4) $V = C_1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$

Soluzione. (1) No. Se $x = (0,1,-1)$ si ha $\|x\| = 0$.

(2) No. Sia $x_k = \frac{1}{\sqrt{k}\,[\log(1+k)]^{2/3}}$. Allora

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,[\log(1+k)]^{4/3}} < \infty$$

quindi $x \in \ell_2$, ma

$$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,[\log(1+k)]^{2/3}} = \infty\,.$$

(3) Sì.

(4) No. Esistono funzioni $f \in C_1(\mathbb{R})$ non limitate. Si può scegliere (ad esempio) f come una funzione sempre nulla tranne che per dei picchi di forma triangolare centrati sugli interi positivi. Il picco k-simo (quello centrato su $x = k$) è un triangolo di base $1/k^3$ e altezza k.

(3) (3 pt). Dimostrare che ℓ_f non è denso in $(\ell_\infty\,, \|\cdot\|_\infty)$.

Soluzione. Sia $\hat{x} := (1,1,1,\ldots)$. Allora $\hat{x} \in \ell_\infty$. Se $y \in \ell_f$ esiste N tale che $y_k = 0$ per ogni $k > N$. Quindi

$$\|\hat{x} - y\|_\infty = \sup_k |\hat{x}_k - y_k| \geq \sup_{k>N} |\hat{x}_k - y_k| = \sup_{k>N} |1 - 0| = 1\,.$$

Abbiamo quindi dimostrato che

$$\|\hat{x} - y\|_\infty \geq 1 \qquad \forall y \in \ell_f\,.$$

Di conseguenza $\hat{x}$ è un elemento di ℓ_∞ che non appartiene alla chiusura di ℓ_f. Quindi ℓ_f non è denso in ℓ_∞.

(4) (4 pt). Sia $V = C_2[0,1]$ e $W = \text{span}\{1-2x, x^2\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x,y)$ dell'operatore π_W che rappresenta il proiettore ortogonale su W. Calcolare $\pi_W x$.

Soluzione. Ortogonalizzo i vettori $1-2x, x^2$.

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= 1 - 2x \\
\|w_1\|^2 &= \int_0^1 (1-2x)^2\,dx = \frac{1}{3} \\
w_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1(x) = x^2 - 3\Big[\int_0^1 (x^2 - 2x^3)\,dx\Big](1-2x) = x^2 - x + \frac{1}{2} \\
\|w_2\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{7}{60}
\end{aligned}
$$

Il nucleo integrale di π_W è dato da

$$
K(x,y) = \frac{w_1(x)\,w_1(y)}{\|w_1\|^2} + \frac{w_2(x)\,w_2(y)}{\|w_2\|^2} = 3\,(1-2x)\,(1-2y) + \frac{60}{7}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\left(y^2 - y + \frac{1}{2}\right)
$$

Infine per calcolare la proiezione del vettore x sul sottospazio W utilizzo la definizione di nucleo integrale

$$
\begin{aligned}
\pi_W x &= \int_0^1 K(x,y)\,y\,dy = \int_0^1 \left[3\,(1-2x)\,(1-2y) + \frac{60}{7}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)\left(y^2 - y + \frac{1}{2}\right)\right] y\,dy \\
&= 3(1-2x)\int_0^1 (y - 2y^2)\,dy + \frac{60}{7}\left(x^2 - x + \frac{x}{2}x\right)\int_0^1 \left(y^3 - y^2 + \frac{y}{2}\right) dy \\
&= 3(1-2x)\left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{60}{7}\left(x^2 - x + \frac{x}{2}x\right)\left(\frac{1}{6}\right) \\
&= \frac{20x^2 - 6x + 3}{14}\,.
\end{aligned}
$$

(5) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$(a)\ \ (\cos x\ \text{sgn}\, x)''$ $\qquad$ $(b)\ \ (\sin x\,\delta_0)'''$ $\qquad$ $(c)\ \ xD(\log|x|)$ $\qquad$ $(d)\ \ x^4\,\delta_0^{(4)}$

Soluzione.

(a)

$$
\begin{aligned}
(\cos x\ \text{sgn}\, x)'' &= (-\sin x\ \text{sgn}\, x + 2\cos x\,\delta_0)' = (-\sin x\ \text{sgn}\, x + 2\delta_0)' \\
&= -\cos x\ \text{sgn}\, x - 2\sin x\,\delta_0 + 2\,\delta_0' = -\cos x\ \text{sgn}\, x + 2\,\delta_0'\,.
\end{aligned}
$$

(b) Poichè $\sin x\,\delta_0 = 0$ si ha $(\sin x\,\delta_0)''' = 0$.

(c) $xD(\log|x|) = x\,P(1/x) = 1$.

(d) In generale si ha $x^n\,\delta_0^{(n)} = (-1)^n n!\,\delta_0$, quindi $x^4\,\delta_0^{(4)} = 24\,\delta_0$.

(6) (6 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(x_2, \frac{x_2}{2}, \frac{x_4}{3}, \frac{x_4}{4}, \frac{x_6}{5}, \frac{x_6}{6}, \ldots\Big)$$

(a) Determinare $\|T\|$.
(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$.
(c) Trovare gli autovalori di T. Per ogni autovalore trovare un autovettore corrispondente.

Risposta. (a) $\|T\| = \sqrt{5/4}$.

(b) $T^*x = \big(0, x_1 + \frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_5}{5} + \frac{x_6}{6}, \ldots\big)$.

(c) L'insieme degli autovalori è $\{0\} \cup \{1/2k : k = 1, 2, 3, \ldots\}$. Un autovettore corrispondente all'autovalore 0 è $x = (1, 0, 0, 0, \ldots)$. Un autovettore corrispondente all'autovalore $1/2k$ è il vettore $x \in \ell_2$ che ha tutte le componenti nulle tranne la $(2k-1)$-esima e la $(2k)$-esima, e vale

$$x_{2k-1} = \frac{2k}{2k-1} x_{2k}\,.$$

(7) (4 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = |x|$. Scrivere l'identità che si ottiene sfruttando la convergenza puntuale della serie in $x = 0$.

Risposta.

$$|x| \sim \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} \qquad\qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

(8) (2 pt). Sia g la trasformata di Fourier della funzione $f(x) = x^2\, e^{-|x|}$. Senza dover calcolare g, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p g(\lambda) = 0$ e che g è di classe C^q in cui p e q valgono ...

Soluzione. L'unico punto in cui le derivate di f possono avere una discontinuità è nell'origine.

se $x < 0$	se $x > 0$	
$f(x) = x^2\, e^x$	$f(x) = x^2\, e^{-x}$	$f(0^-) = f(0^+)$
$f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$	$f'(x) = e^{-x}(-x^2 + 2x)$	$f'(0^-) = f'(0^+)$
$f''(x) = e^x(x^2 + 4x + 2)$	$f''(x) = e^{-x}(x^2 - 4x + 2)$	$f''(0^-) = f''(0^+)$
$f^{(3)}(x) = e^x(x^2 + 6x + 6)$	$f^{(3)}(x) = e^{-x}(-x^2 + 6x - 6)$	$f^{(3)}(0^-) \neq f^{(3)}(0^+)$

Ho ottenuto che f è di classe C^2 con $f^{(3)}$ continua a tratti. Inoltre f, f', f'' ed $f^{(3)}$ appartengono ad $L_1(\mathbb{R})$. Quindi posso affermare che $\lambda^3\, g(\lambda) \to 0$ per $\lambda \to \infty$.

Poichè $x^k f \in L_1(\mathbb{R})$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, si ha che $g \in C^\infty(\mathbb{R})$.

(9) (3 pt). Sia T un operatore lineare limitato sullo spazio di Hilbert V. Dimostrare che se esiste un numero reale $a > 0$ tale che

$$\|Tv\| \geq a\,\|v\| \qquad \forall v \in V$$

allora $\operatorname{Ran} T$ è chiuso in V.

Schema di soluzione. Sia y_n è una successione convergente in $\operatorname{Ran} T$ e sia $y = \lim_{n\to\infty} y_n$. Allora esiste una successione $x_n \in V$ tale che $y_n = Tx_n$. Poichè y_n è convergente, y_n è di Cauchy. Dall'ipotesi $\|Tv\| \geq a\,\|v\|$ segue che x_n è anche di Cauchy. Ma V è completo quindi esiste $x \in V$ tale che $x_n \to x$. Dalla continuità di T segue che

$$Tx = T(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} Tx_n = \lim_{n\to\infty} y_n = y\,.$$

Quindi $y \in \operatorname{Ran} T$ e dunque $\operatorname{Ran} T$ è chiuso.

Per maggiori dettagli vedi, sui "Rudimenti", la fine della dimostrazione del fatto che lo spettro di un operatore autoaggiunto è reale.