Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Esonero 2

Cesi/Presilla – A.A. 2005–06

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

(1) (5 pt). Sia $V = C_2[0,1]$ e $W = \text{span}\{x, x^2\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x,y)$ dell'operatore π_W che rappresenta il proiettore ortogonale su W. Calcolare $\pi_W x^3$.

Soluzione. Ortogonalizzo i vettori x, x^2.

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= x \\
\|w_1\|^2 &= \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3} \\
w_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1(x) = x^2 - 3\Big[\int_0^1 x^3\,dx\Big]\,x = x^2 - \frac{3}{4}\,x \\
\|w_2\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{3}{4}\,x\right)^2 dx = \frac{1}{80}
\end{aligned}$$

Il nucleo integrale di π_W è dato da

$$K(x,y) = \frac{w_1(x)\,w_1(y)}{\|w_1\|^2} + \frac{w_2(x)\,w_2(y)}{\|w_2\|^2} = 3\,xy + 80\,\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)\left(y^2 - \frac{3}{4}y\right)$$

Infine per calcolare la proiezione del vettore x^3 sul sottospazio W utilizzo la definizione di nucleo integrale

$$\begin{aligned}
\pi_W x^3 &= \int_0^1 K(x,y)\,y^3\,dy = \int_0^1 \left[3\,xy + 80\,\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)\left(y^2 - \frac{3}{4}y\right)\right] y^3\,dy \\
&= 3x\int_0^1 y^4\,dy + 80\,\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)\int_0^1 \left(y^5 - \frac{3}{4}y^4\right)\,dy \\
&= \frac{3}{5}x + 80\,\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)\left(\frac{1}{6} - \frac{3}{20}\right) = \frac{3}{5}x - 80\,\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right)\frac{1}{60} \\
&= \frac{3}{5}x + \frac{4}{3}\,\left(x^2 - \frac{3}{4}x\right) = \frac{4}{3}x^2 - \frac{2}{5}x\,.
\end{aligned}$$

(Verifica facoltativa). Controllo che il risultato sia giusto. Il vettore $x^3 - \pi_W x^3$ deve essere ortogonale a x e a x^2.

$$\begin{aligned}
v(x) &:= x^3 - \pi_W x^3 = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}x \\
\langle v, x\rangle &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}x\right) x\,dx = \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{2}{15}\right] = 0 \\
\langle v, x^2\rangle &= \int_0^1 \left(x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{2}{5}x\right) x^2\,dx = \left[\frac{1}{6} - \frac{4}{15} + \frac{1}{10}\right] = 0
\end{aligned}$$

E andiamo!

(2) (6 pt). Nei casi seguenti dire se F è una distribuzione su $\mathcal{K}$. Rispondere semplicemente sì o no.

(a) $F(f) = f''(2) - f'(5) + f(0)$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

(b) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{-1/4} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

(c) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} |x|^{-3/2} f(x)\, dx$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

(d) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \cos(f(x))\, dx$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

(e) $F(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x)$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

(f) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{1+x^3}\, dx$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

Soluzione. (a) Sì. (b) Sì. (c) No. (d) No. (e) No. (f) No.

(3) (2 pt). Una successione $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ di elementi di $\mathcal{K}$ è detta *convergente* a $f \in \mathcal{K}$ se ...

vedi le note.

(4) (3 pt). Dimostrare con un controesempio esplicito che il teorema della proiezione su un sottospazio W di uno spazio di Hilbert V è falso senza l'ipotesi che W sia chiuso.

Soluzione. Sia $V = \ell_2$ con il prodotto scalare canonico.

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_k \qquad x, y \in \ell_2\,.$$

V è uno spazio di Hilbert. Sia $W := \ell_f$, l'insieme di tutte le successioni finite. W è un sottospazio di V. È facile dimostrare che

$$\ell_f^{\perp} = \{0\}\,.$$

Infatti se u è un vettore che appartiene al complemento ortogonale di ℓ_f, allora, in particolare, u deve essere ortogonale ai vettori di base canonici

$$e^{(1)},\, e^{(2)},\, e^{(3)},\, \ldots$$

Di conseguenza si ha

$$0 = \langle u, e^{(k)} \rangle = u_k \qquad \forall k = 1, 2, 3, \ldots$$

vale a dire $u = 0$. Quindi $\ell_f^{\perp} = \{0\}$. A questo punto basta prendere un qualsiasi vettore $v \in \ell_2 \backslash \ell_f$, ad esempio

$$v = \Big(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\Big)$$

ed è ovvio che è impossibile scrivere v come somma $v = w + z$ con $w \in \ell_f$ e $z \in \ell_f^{\perp}$.

(5) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor x \rfloor$ è la parte intera di x, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad x).

$$(a)\quad D[x^3\,P(1/x)] \qquad\qquad (b)\quad x^2 D[P(1/x)] \qquad\qquad (c)\quad D[\sin(\pi x)\lfloor x\rfloor] \qquad\qquad (d)\quad \cos x\,\delta_0''$$

Soluzione. (a) Pocihè $x^3P(1/x) = x^2$, si ha $D[x^3\,P(1/x)] = D[x^2] = 2x$.

(b) Ricordando che$xP(1/x) = 1$ e $x^2P(1/x) = x$ possiamo scrivere

$$x^2D[P(1/x)] = D[x^2\,P(1/x)] - D(x^2)P(1/x) = D(x) - 2xP(1/x) = 1 - 2 = -1\,.$$

(c) Usando la regola di derivazione di un prodotto fra una distribuzione e una funzione C^∞, si ottiene

$$D[\sin(\pi x)\lfloor x\rfloor] = \pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor + \sin(\pi x)\sum_{k\in\mathbb{Z}}\delta_k = \pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor + \sum_{k\in\mathbb{Z}}\sin(k\pi)\delta_k = \pi\cos(\pi x)\lfloor x\rfloor$$

(d)

$$\cos x\,\delta_0'' = \cos 0\,\delta_0'' + 2\sin 0\,\delta_0' - \cos 0\,\delta_0 = \delta_0'' - \delta_0\,.$$

(6) (4 pt). Sia F il funzionale lineare su $(C[0,1], \|\cdot\|_u)$ definito come

$$F(f) := \int_0^1 f(x)\,dx - f(0)\,.$$

Calcolare $\|F\|$. (Dimostrare ciò che si afferma).

Soluzione. Poichè

$$|F(f)| \le \int_0^1 |f(x)|\,dx + |f(0)| \le \|f\|_u + |f(0)| \le 2\,\|f\|_u$$

si ha $\|F\| \le 2$. D'altra parte consideriamo la successione di funzioni (disegnare il grafico per capire qual è l'idea)

$$f_n(x) = 1 - 2(1-x)^n\,.$$

Si ha

$$0 \le (1-x)^n \le 1 \qquad \forall x \in [0,1]\,,$$

di conseguenza

$$-1 \le 1 - 2(1-x)^n \le 1 \qquad \forall x \in [0,1]\,,$$

e quindi $\|f_n\|_u = 1$. Osserviamo inoltre che $f_n(0) = -1$, per cui

$$F(f_n) = \int_0^1 \big[1 - 2(1-x)^n\big]\,dx + 1 = 2 - 2\int_0^1 (1-x)^n\,dx = 2 - \frac{2}{n+1}\,.$$

Otteniamo dunque

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|F(f_n)|}{\|f_n\|_u} = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{2}{n+1} = 2\,.$$

Questo dimostra che $\|F\| \ge 2$. Poichè sapevamo già che $\|F\| \le 2$ concludiamo che $\|F\| = 2$.

(Si potevano scegliere molte altre successioni f_n. Ad esempio si poteva prendere come f_n la funzione lineare a tratti il cui grafico si ottiene unendo i punti $(0,-1)$, $(1/n,1)$ e $(1,1)$.)

(7) (4 pt). Nello spazio ℓ_1 consideriamo il funzionale lineare φ_a definito come

$$\varphi_a(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \,,$$

in cui $a \in \ell_\infty$. Dimostrare che vale $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$.

Soluzione. (Presente nei "Rudimenti").

Sia $a \in \ell_\infty$. Allora, per ogni $x \in \ell_1$ si ha

$$|\varphi_a(x)| = \Big| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \Big| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|\,|x_i| \leq \sup_i |a_i| \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = \|a\|_\infty \, \|x\|_1$$

Questa disuguaglianza dimostra che la sommatoria è finita e al tempo stesso che $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_\infty$.

Sia dunque $\varepsilon > 0$. Voglio trovare $x \in \ell_1$ tale che

$$|\varphi_a(x)| \geq (\|a\|_\infty - \varepsilon)\, \|x\|_1$$

Dato che $\|a\|_\infty := \sup_i |a_i|$, per definizione di estremo superiore, esiste un intero j tale che $|a_j| > \|a\|_\infty - \varepsilon$. Scelgo a questo punto la mia successione $x \in \ell_1$ come

$$x = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$$

in cui l'elemento 1 appare alla posizione j–sima. Ovviamente si ha

$$\|x\|_1 := \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| = 1 \,.$$

Con questa scelta di x ottengo.

$$|\varphi_a(x)| = |\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i| = |a_j x_j| = |a_j| > \|a\|_\infty - \varepsilon = (\|a\|_\infty - \varepsilon)\, \|x\|_1$$

Quindi $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$

(8) (3 pt). Si consideri la distribuzione F sullo spazio $\mathcal{K}$ definita tramite l'integrale (improprio) assolutamente convergente

$$F(f) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx \,.$$

Si dimostri che è possibile scrivere la derivata F' nella forma

$$F'(f) = \int_{\mathbb{R}} [\ ?\ ]\, dx$$

in modo tale che l'integrando [?] sia assolutamente convergente e sia espresso in termini di f e non di f'. Si determini la quantità integranda incognita.

Soluzione. Per definizione di derivata di una distribuzione

$$F'(f) = -F(f') = -\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{K \to +\infty} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq K} \frac{f'(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx \,.$$

Integrando per parti e assumendo che K sia sufficientemente grande in modo tale che $\operatorname{supp} f \subset [-K, K]$, si ottiene

$$\int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{f'(x)}{\sqrt{|x|}}\, dx = \left[\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\right]_{-K}^{-\varepsilon} + \left[\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}\right]_{\varepsilon}^{K} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)\, f(x)}{|x|^{3/2}}\, dx$$
$$= \frac{f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{1}{2}\int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, f(x)\, dx\,.$$

Per quanto riguarda il primo termine, con la regola di l'Hôpital, si ha

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{f(-\varepsilon) - f(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{[-f'(-\varepsilon) - f'(\varepsilon)]\sqrt{\varepsilon}}{2} = 0\,.$$

Inoltre osservo che

$$\int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, f(0)\, dx = 0\,,$$

in quanto è l'integrale di una funzione dispari su un dominio simmetrico rispetto all'origine. Di conseguenza posso scrivere

$$\int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, f(x)\, dx = \int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, [f(x) - f(0)]\, dx\,.$$

Il vantaggio di questa scrittura è che

$$h(x) := \left| \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, [f(x) - f(0)] \right| = \left| \frac{f(x) - f(0)}{|x|} \frac{1}{\sqrt{|x|}} \right| \le \frac{\|f'\|_u}{\sqrt{|x|}}\,,$$

il che implica che h è localmente integrabile. D'altra parte posso anche scrivere

$$h(x) \le \frac{|f(x)| + |f(0)|}{|x|^{3/2}} \le \frac{2\,\|f\|_u}{|x|^{3/2}}$$

per cui h è assolutamente integrabile su tutto $\mathbb{R}$. Di conseguenza posso prendere il limite $\varepsilon \to 0^+$ e $K \to +\infty$ e ottengo

$$F'(f) = -\lim_{\varepsilon \to 0^+} \lim_{K \to +\infty} \frac{1}{2}\int_{\varepsilon \le |x| \le K} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, [f(x) - f(0)]\, dx = -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \frac{\operatorname{sgn}(x)}{|x|^{3/2}}\, [f(x) - f(0)]\, dx\,.$$