MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 9 maggio 2003

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Esercizio 1 Stabilire quale dei seguenti spazi è o non è uno spazio vettoriale sul campo reale. Rispondere si o no senza motivare.

(a) $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2\}$;

(b) L'insieme dei polinomi di grado $n = 10$;

(c) L'insieme delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ con derivata n-esima continua e tali che $f(1) = 3$;

(d) L'insieme delle funzioni reali $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ limitate e che si annullano in $x = 0$.

[punteggio 8]

Esercizio 2 Stabilire, motivando la risposta, per quali valori $\alpha \in \mathbb{R}$

$$||f|| = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x)|}{(1+x^2)^\alpha}\, dx$$

è una norma nello spazio vettoriale $C_b(\mathbb{R})$ delle funzioni limitate in $\mathbb{R}$.

[punteggio 5]

Esercizio 3 Dimostrare che lo spazio vettoriale ℓ_f è denso in ℓ_2. Si rammenti che

$$\begin{aligned}
\ell_f &= \{x \in \mathbb{R}^\infty : \exists\, N \text{ tale che } x_n = 0 \text{ per } n > N\} \\
\ell_2 &= \left\{ x \in \mathbb{R}^\infty : ||x||_2 = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}
\end{aligned}$$

[punteggio 4]

<u>Esercizio 4</u> Dimostrare che, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $p > 1$, allora

$$||x||_1 \leq n^{1-\frac{1}{p}} \; ||x||_p$$

[punteggio 4]

<u>Esercizio 5</u> Dimostrare che $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = e^{ix}$ e $v_3(x) = e^{-ix}$ sono vettori linearmente indipendenti in $C(\mathbb{R}; \mathbb{C})$, spazio vettoriale delle funzioni continue in $\mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{C}$.

[punteggio 5]

Esercizio 6 Ortogonalizzare i vettori $v_0(x) = 1$, $v_1(x) = x$ e $v_2(x) = x^2$ in $C_2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$, spazio euclideo delle funzioni reali continue con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)e^{-x^2}dx$.

[punteggio 5]

<u>Esercizio 7</u> Sia $\mathcal{W} = (w_1, w_2, w_3, \ldots)$ una base ortogonale (non normalizzata) nello spazio euclideo complesso infinito dimensionale $(L, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dimostrare che per ogni $v \in L$ vale la disugualianza di Bessel

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle v, w_k \rangle|^2}{||w_k||^2} \leq ||v||^2$$

[punteggio 5]