Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 1

Cesi/Presilla – A.A. 2006–07

Canale[1]	Cesi	Presilla

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto rimpiazza gli esoneri	1	2	3

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

[1] Chi segue le lezioni indica il canale che sta seguendo. Chi non segue indica Presilla se è di "Fisica" e Cesi se di "Astrofisica"

(1) (4 pt). Dire se l'applicazione $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V. Rispondere semplicemente sì o no.

(a) $V=\mathbb{R}^3$ e $\|x\|=|x_1|+2|x_2|+5|x_3|$ $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{N}}$

(b) $V=\mathbb{R}^3$ e $\|x\|=|x_1|^2+|x_2|^2+|x_3|^2$ $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{N}}$

(c) $V=\ell_2$ e $\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|}{\sqrt{k}}$. $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{N}}$

(d) $V=C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\|=\int_{\mathbb{R}}\frac{|f(x)|}{1+x^2}\,dx$ $\boxed{\text{S}}\,\boxed{\text{N}}$

Soluzione. (a) S.

(b) N. Non è omogenea.

(c) No. Sia $x_k=\frac{1}{\sqrt{k}\,[\log(1+k)]^{2/3}}$. Allora $x\in\ell_2$, ma

$$\|x\|=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\,[\log(1+k)]^{2/3}}=\infty\,.$$

(d) S.

(2) (4 pt). Se l'affermazione è vera dire semplicemente che è vera, se è falsa esibire un controesempio esplicito. Nel seguito T è un operatore lineare limitato sullo spazio di Hilbert V, f è una funzione su $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}[f]$ è la trasformata di Fourier di f.

(a) Se T è iniettivo T^* è iniettivo.

(b) Se T è suriettivo T^4 è suriettivo.

(c) Se $f\in L_1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f]$ è una funzione continua e limitata.

(d) Se f è differenziabile, $\mathcal{F}[f]$ è differenziabile.

Soluzione. (a) Falso. Sia $T=\vartheta_+$. T è iniettivo, ma $T^*=\vartheta_-$ non lo è.

(b) Vero. Se T è suriettivo $T(V)=V$, quindi $T^4(V)=V$.

(c) Vero.

(c) Falso. $1/(1+x^2)$ è differenziabile, ma la sua trasformata di Fourier $\pi\,e^{-|x|}$ non lo è.

(3) (4 pt). Sia $V=C_2[0,\infty)$ e $W=\operatorname{span}\{e^{-x},e^{-2x}\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x,y)$ dell'operatore π_W che rappresenta il proiettore ortogonale su W. Calcolare $\pi_W(x^n\,e^{-x})$, in cui n è un intero non negativo. Controllare che la soluzione sia giusta nel caso $n=0$. (Sugg: verificare preliminarmente, ad esempio per induzione, che $\int_0^\infty x^n\,e^{-ax}\,dx=n!/a^{n+1}$ per ogni $n\in\mathbb{N}$ e $a>0$).

Soluzione. Sia

$$I_n(a):=\int_0^\infty x^n\,e^{-ax}\,dx\qquad n\in\mathbb{N},\ a>0\,.$$

Integrando per parti, si ottiene, se $n\geq 1$,

$$I_n(a)=\left[-\frac{1}{a}x^n\,e^{-ax}\right]_0^\infty+\frac{n}{a}\int_0^\infty x^{n-1}\,e^{-ax}\,dx=\frac{n}{a}\,I_{n-1}(a)\,,$$

che, iterata, ci dà

$$I_n(a)=\frac{n!}{a^n}\,I_0(a)=\frac{n!}{a^n}\int_0^\infty e^{-ax}\,dx=\frac{n!}{a^{n+1}}\,.$$

Grazie a questo risultato posso scrivere

$$\left\langle\, x^n e^{-ax},\, x^k e^{-bx} \,\right\rangle = I_{n+k}(a+b) = \frac{(n+k)!}{(a+b)^{n+k+1}}$$
$$\|x^n e^{-ax}\|^2 = I_{2n}(2a) = \frac{(2n)!}{(2a)^{2n+1}}$$

Ortogonalizzo i vettori e^{-x}, e^{-2x}.

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= e^{-x} \\
\|w_1\|^2 &= \|e^{-x}\|^2 = \frac{1}{2} \\
w_2(x) &= e^{-2x} - \frac{\langle e^{-2x}, e^{-x}\rangle}{\|e^{-x}\|^2}\, e^{-x} = e^{-2x} - \frac{2}{3}\, e^{-x} \\
\|w_2\|^2 &= \int_0^\infty \left(e^{-2x} - \frac{2}{3}\, e^{-x}\right)^2 dx = \frac{1}{36}\,.
\end{aligned}$$

Il nucleo integrale di π_W è dato da

$$\begin{aligned}
K(x,y) &= \frac{w_1(x)\, w_1(y)}{\|w_1\|^2} + \frac{w_2(x)\, w_2(y)}{\|w_2\|^2} \\
&= 2\, e^{-(x+y)} + 36\, \left(e^{-2x} - \frac{2}{3}\, e^{-x}\right)\, \left(e^{-2y} - \frac{2}{3}\, e^{-y}\right)\,.
\end{aligned}$$

Infine calcolo la proiezione su W di $x^n\, e^{-x}$

$$\begin{aligned}
\pi_W\big(x^n\, e^{-x}\big) &= \int_0^\infty K(x,y)\, y^n\, e^{-y}\, dy \\
&= 2\, \langle y^n\, e^{-y},\, e^{-y}\rangle\, e^{-x} + 36\, \left\langle y^n\, e^{-y},\, e^{-2y} - \frac{2}{3}\, e^{-y}\right\rangle\, \left(e^{-2x} - \frac{2}{3}\, e^{-x}\right) \\
&= \frac{2\, n!}{2^{n+1}}\, e^{-x} + 36\, \left[\frac{n!}{3^{n+1}} - \frac{2}{3}\frac{n!}{2^{n+1}}\right]\, \left(e^{-2x} - \frac{2}{3}\, e^{-x}\right) \\
&= n!\, \left[\frac{e^{-x}}{2^n} + 12\, \left(\frac{1}{3^n} - \frac{1}{2^n}\right)\, \left(e^{-2x} - \frac{2}{3}\, e^{-x}\right)\right]\,.
\end{aligned}$$

Se $n = 0$ si ottiene $\pi_W(e^{-x}) = e^{-x}$, come è giusto che sia.

(4) (3 pt). Dimostrare la seguente affermazione: sia $g_n \in C(\mathbb{R})$ una successione di funzioni non negative, tali che

(a) $\int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, dx = 1$
(b) g_n è nulla al di fuori dell'intervallo $[-a_n, a_n]$, in cui $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Allora, indicando con φ_{g_n} la distribuzione $\varphi_{g_n}(f) := \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\, f(x)\, dx$, si ha $\lim_{n\to\infty} \varphi_{g_n} = \delta_0$.

Soluzione. Vedi sui "Rudimenti".

(5) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\;\; D[x^2\, (\log|x|)'] \qquad\qquad (b)\;\; D[\cos x\; \mathrm{sgn}(x)] \qquad\qquad (c)\;\; e^{\sin x}\, \delta_0'$$

Soluzione.

(a)
$$D[x^2\, (\log|x|)'] = D[x^2\, P(1/x)] = D[x] = 1\,.$$

(b)

$$D[\cos x \ \mathrm{sgn}(x)] = -\sin x \ \mathrm{sgn}(x) + 2 \ \cos x \, \delta_0 = -\sin|x| + 2\,\delta_0 \,.$$

(c)

$$e^{\sin x}\,\delta_0' = e^{\sin 0}\,\delta_0' - \left[e^{\sin x}\ \cos x\right]_{x=0}\,\delta_0 = \delta_0' - \delta_0\,.$$

(6) (5 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(x_1,\ \frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{x_3}{3},\ \frac{x_3+x_4}{4},\ \frac{x_5}{5},\ \frac{x_5+x_6}{6},\ \ldots\right)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?,\ ?,\ ?,\ ?,\ \ldots)$
(b) Trovare gli autovalori di T. Scrivere esplicitamente i 4 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, un autovettore corrispondente.
(c) Determinare se T è suriettivo o meno.

Soluzione. (a) Dall'identità $\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ si ricava

$$T^*x = \left(x_1 + \frac{x_2}{2},\ \frac{x_2}{2},\ \frac{x_3}{3} + \frac{x_4}{4},\ \frac{x_4}{4},\ \frac{x_5}{5} + \frac{x_6}{6},\ \frac{x_6}{6},\ \ldots\right)\,.$$

(b) Per trovare gli autovalori studio l'equazione

$$Tx = \lambda\, x\,,$$

che diventa

$$\frac{x_{2k-1}}{2k-1} = \lambda x_{2k-1} \qquad\qquad \frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2k} = \lambda x_{2k} \qquad\qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{1}$$

Caso 1. Se λ non è della forma $1/(2k-1)$ con k intero positivo ottengo dalla prima equazione $x_{2k-1} = 0$ che sostituita nella seconda mi dà

$$x_{2k} = \lambda\,(2k)\,x_{2k} \qquad\qquad k = 1,2,3,\ldots$$

Affinchè ci sia una soluzione non nulla è necessario e sufficiente che sia $\lambda = (2k)^{-1}$ per un qualche intero positivo k. In questo caso un autovettore è dato da

$$x = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots)\ ,$$

in cui l'unico 1 occupa la posizione $2k$.

Caso 2. Se λ è della forma $1/(2k-1)$ con k intero positivo la prima equazione in ① è automaticamente soddisfatta per quel valore di k, mentre la seconda equazione diventa

$$\frac{x_{2k-1}+x_{2k}}{2k} = \frac{x_{2k}}{2k-1}$$

che mi dà

$$x_{2k} = (2k-1)\,x_{2k-1}\,.$$

Se $\lambda = 1/(2k-1)$ abbiamo quindi un autovalore con autovettore corrispondente

$$x = (0,\ 0,\ \ldots, 0,\ 0,\ 1,\ 2k-1,\ 0,\ \ldots)\,.$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\begin{aligned}\sigma_p(T) &= \{1/(2k) : k = 1,2,3,\ldots\} \cup \{1/(2k-1) : k = 1,2,3,\ldots\}\\ &= \{1/k : k = 1,2,3,\ldots\}\,.\end{aligned}$$

I quattro autovalori più grandi in modulo, con relativi autovettori sono

$$
\begin{aligned}
&\lambda = 1 && x = (1,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0 \ldots) \\
&\lambda = 1/2 && x = (0,\, 1,\, 0,\, 0,\, 0,\, 0, \ldots) \\
&\lambda = 1/3 && x = (0,\, 0,\, 1,\, 3,\, 0,\, 0, \ldots) \\
&\lambda = 1/4 && x = (0,\, 0,\, 0,\, 1,\, 0,\, 0, \ldots)
\end{aligned}
$$

(c) Poichè lo spettro è chiuso, 0 deve appartenere allo spettro continuo di T, quindi T non è suriettivo. Alla stessa conclusione si giunge se si scrive l'equazione

$$Tx = y\,,$$

che, risolta per x, implica

$$x_{2k-1} = (2k-1)\, y_{2k-1}\,.$$

Ponendo, ad esempio, $y_k = 1/k$ si ottiene $x_{2k-1} = 1$. Di conseguenza x non appartiene ad ℓ_2.

(7) (4 pt). Sia g la trasformata di Fourier della funzione f. Senza dover calcolare g, è possibile affermare che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^p g(\lambda) = 0$ e che g è di classe C^q in cui p e q valgono ...

$$(a)\quad f(x) = \frac{x-3}{1+x^4} \qquad\qquad (b)\quad f(x) = \begin{cases} (1-x^2)^2 & \text{se } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Soluzione. (a) Poichè $f \in C^\infty$ e $f^{(k)} \in L_1$ per tutti i k interi non negativi si ha che $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^k g(\lambda) = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, vale a dire g va a zero all'infinito più velocemente dell'inverso di qualsiasi potenza.

Poichè $x^k f \in L_1$, per $k = 0, 1$ si ha $g \in C^1$.

(b) Cerco il più piccolo intero p tale che $f^{(p)}$ è discontinua. Gli unici punti di discontinuità possono essere ± 1. Per simmetria posso considerare solo $x = 1$. Nell'intervallo $(-1, 1)$ posso scrivere

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2x^2 + 1 & f(1^-) &= 0 = f(1^+) \\
f'(x) &= 4x^3 - 4x & f'(1^-) &= 0 = f'(1^+) \\
f''(x) &= 12x^2 - 4 & f''(1^-) &= 8 \neq 0 = f''(1^+)\,.
\end{aligned}
$$

Quindi $p = 2$ e $\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^2\, g(\lambda) = 0$.

La funzione f è continua a supporto compatto, quindi $x^k f \in L_1$ per ogni $k \in \mathbb{N}$. Di conseguenza $g \in C^\infty$.

(8) (6 pt). Sia T un operatore lineare limitato sullo spazio di Banach V. Dimostrare che se esiste un intero positivo N tale che $T^N = 0$ allora lo spettro di T consiste unicamente del punto $z = 0$. (Sugg: È facile dimostrare che 0 appartiene alle spettro di T. Se invece $z \neq 0$, si può dimostrare che $(zI - T)$ è invertibile construendo esplicitamente l'inverso $R_z(T)$, grazie all'ipotesi $T^N = 0$).

Soluzione. Scelgo $v \in V$, $v \neq 0$. Sia k il più grande intero non negativo tale che $T^k v \neq 0$. Ovviamente $0 \leq k < N$. Allora abbiamo $w = T^k v \neq 0$, ma $T^{k+1} v = 0$. Quindi $T(T^k v) = Tw = 0$. Di conseguenza $w \in \operatorname{Ker} T$ e dunque 0 è un autovalore di T.

Sia ora $z \neq 0$. Costruisco l'inverso di $(zI - T)$ e dimostro in questo modo che z non appartiene allo spettro di T. L'idea è la seguente. Dimenticandomi <u>momentaneamente</u> problemi di convergenza, scrivo formalmente[2]

$$(zI - T)^{-1} = 1/z\,(I - z^{-1}T)^{-1} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{z^{n+1}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T^n}{z^{n+1}}\,.$$

[2] i seguenti passaggi <u>non</u> sono una dimostrazione ma servono solo ad *indovinare* chi è l'inverso di $(zI - T)$

Nell'ultima uguaglianza ho usato il fatto che $T^N = 0$. Questo mi suggerisce che l'operatore

$$B := \sum_{n=0}^{N-1} \frac{T^n}{z^{n+1}}$$

che è ben definito in quanto somma finita di potenze di T, potrebbe essere l'inverso di $(zI - T)$. Per dimostrarlo basta far vedere che

$$B(zI - T) = (zI - T)B = I\,.$$

Ma questo è molto semplice infatti

$$B(zI - T) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{T^n}{z^n} - \frac{T^{n+1}}{z^{n+1}} \right] = T^0 - \frac{T^N}{z^N} = I\,.$$

Nello stesso modo si dimostra $(zI - T)B = I$. Quindi $(zI - T)$ è invertibile, per cui $z \notin \sigma(T)$.