Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 2

Cesi/Presilla – A.A. 2005–06

Nome	
Cognome	

Canale	Cesi	Presilla

Il voto dello scritto rimpiazza gli esoneri	1	2	3

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

(1) (3 pt). Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(1) $V = \ell_4$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{2/3}}$.
(2) $V = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\, dx$.
(3) $V = C_2(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\, dx$.

Soluzione. (1). Non è una norma. Si prenda $x_k = k^{-1/3}$. Allora $x \in \ell_4$, poichè

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}} < \infty$$

ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|}{k^{2/3}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty\,.$$

(2). Non è una norma. Si prenda $f(x) = \frac{1}{\log(1+|x|)}$ e l'integrale diverge.

(3). È una norma (si dimostra con Cauchy–Schwarz).

(2) (3 pt). Dimostrare la *prima formula dei risolventi*: sia $T \in \mathcal{L}(V)$, dove V è uno spazio di Banach. Se $\alpha, \beta \in \rho(T)$ allora vale

$$R_\alpha(T) - R_\beta(T) = (\beta - \alpha)\, R_\alpha(T) R_\beta(T)\,.$$

Soluzione. Poichè $R_z(T) = (zI - T)^{-1}$, e quindi $R_z(T)\,(zI - T) = I$, posso scrivere

$$\begin{aligned} R_\alpha(T) - R_\beta(T) &= R_\alpha(T)\,(\beta I - T)\, R_\beta(T) - R_\alpha(T)\,(\alpha I - T)\, R_\beta(T) \\ &= \beta\, R_\alpha(T)\, R_\beta(T) - R_\alpha(T)\, T\, R_\beta(T) - \alpha\, R_\alpha(T)\, R_\beta(T) + R_\alpha(T)\, T\, R_\beta(T) \\ &= (\beta - \alpha) R_\alpha(T) R_\beta(T)\,. \end{aligned}$$

(3) (3 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f appartiene a $C_1(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$).

$$(a)\ \ f(x) := \frac{1 + 2x + 4x^2}{(1 + x^4)^\alpha} \qquad (b)\ \ f(x) := \frac{\log(2 + x^4)}{(1 + x^6)^\alpha} \qquad (c)\ \ f(x) := (1 + x^2)^\alpha\, e^{-\sqrt{|x|}}$$

Risposta. (a). $\sigma > 3/4$. (b) $\alpha > 1/6$. (c) $\alpha \in \mathbb{R}$.

(4) (3 pt). Dimostrare la seguente affermazione (se vera) o trovare un controesempio (se falsa): se F è un funzionale lineare continuo su ℓ_0, allora esiste $a = (a_1, a_2, \ldots) \in \ell_1$ tale che

$$F(x) = \varphi_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\, x_k \qquad \forall x \in \ell_0\,.$$

Soluzione. Vero (dimostrazione sui "Rudimenti").

(5) (4 pt). Sia $V = C_2[0, \pi]$ e $W = \operatorname{span}\{1, \sin x\}$. Determinare il nucleo integrale $K(x, y)$ dell'operatore π_W che rappresenta il proiettore ortogonale su W. Calcolare $\pi_W(\cos x)$.
Risposta. $K(x, y) = \frac{1}{\pi} + \frac{2\pi}{\pi^2 - 8} \left[\sin x - \frac{2}{\pi}\right] \left[\sin y - \frac{2}{\pi}\right]$. $\pi_W(\cos x) = 0$.

(6) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\quad \cos x\,|x|''' \qquad\qquad (b)\quad x^2\,\delta_0''' \qquad\qquad (c)\quad D[x^2\,\operatorname{sgn} x] \qquad\qquad (d)\quad D[x^2\,D(\log|x|)]$$

Soluzione. (a).

$$\cos x\,|x|''' = \cos x\ \operatorname{sgn}(x)'' = 2\ \cos x\,\delta_0' = 2[\cos 0\,\delta_0' + \sin 0\,\delta_0] = 2\,\delta_0' .$$

(b).

$$x^2\,\delta_0''' = 0^2\,\delta_0''' - 3(2x)|_{x=0}\,\delta_0'' + 3\cdot 2\,\delta_0' = 6\,\delta_0' .$$

(c).

$$D[x^2\ \operatorname{sgn} x] = 2x\ \operatorname{sgn}(x) + 2x^2\,\delta_0 = 2x\ \operatorname{sgn}(x) = 2|x| .$$

(d).

$$D[x^2\,D(\log|x|)] = D[x^2\,P(1/x)] = D[x] = 1 .$$

(7) (8 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(\frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_6}{6}, 0, \frac{x_8}{8}, 0, \ldots\Big)$$

(a) Determinare $\|T\|$.
(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$.
(c) Trovare gli autovalori di T (per ogni autovalore esibire un autovettore corrispondente).
(d) Dire se $\lambda = 1/2$ è un punto delle spettro continuo di T (dimostrare).

Soluzione. Per i punti (a), (b) e (c) si veda alla sezione "Esercizi svolti" del sito web.

(d). Devo capire se $I/2 - T$ è suriettivo e meno. L'equazione $(I/2 - T)x = y$ si scrive come:

$$\begin{aligned}
&\frac{x_1}{2} - \frac{x_2}{2} = y_1 && \frac{x_2}{2} = y_2\\
&\frac{x_3}{2} - \frac{x_4}{4} = y_3 && \frac{x_4}{2} = y_4\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{x_{2n-1}}{2} - \frac{x_{2n}}{2n} = y_{2n-1} && \frac{x_{2n}}{2} = y_{2n}\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

La soluzione di questo sistema è

$$x_{2n} = 2y_{2n} \qquad\qquad x_{2n-1} = 2y_{2n-1} + 2\frac{y_{2n}}{n} .$$

Per affermare che $I/2 - T$ è suriettivo devo far vedere che per ogni $y \in \ell_2$ si ha $x \in \ell_2$. Ma se $y \in \ell_2$ ottengo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \big[|x_{2n}|^2 + |x_{2n-1}|^2\big] = 4\sum_{n=1}^{\infty} \big[|y_{2n}|^2 + |y_{2n-1} + y_{2n}/n|^2\big] .$$

Usando la disuguaglianza

$$|a+b|^2 \le (|a| + |b|)^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a|\,|b| \le 2(|a|^2 + |b|^2) ,$$

otteniamo

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le 4\sum_{n=1}^{\infty} \big[|y_{2n}|^2 + 2|y_{2n-1}|^2 + 2|y_{2n}/n|^2\big] < \infty .$$

Di conseguenza $x \in \ell_2$, quindi $I/2 - T$ è suriettivo e dunque $1/2$ non appartiene allo spettro continuo (conoscendo il teorema di Fredholm questo discende dalla compattezza di T).

(8) (3 pt). Trovare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi. \end{cases}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin x \, e^{-i\lambda x} \, dx = \frac{1}{2i} \int_{-\pi}^{\pi} \left[e^{-i(\lambda-1)x} - e^{-i(\lambda+1)x} \right] dx \\ &= \frac{1}{2i} \left[\frac{e^{-i(\lambda-1)\pi} - e^{i(\lambda-1)\pi}}{-i(\lambda-1)} - \frac{e^{-i(\lambda+1)\pi} - e^{i(\lambda+1)\pi}}{-i(\lambda+1)} \right] \\ &= \frac{i}{2} \left[\frac{e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}}{i(\lambda-1)} - \frac{e^{i\lambda\pi} - e^{-i\lambda\pi}}{i(\lambda+1)} \right] \\ &= \frac{2i \sin(\lambda\pi)}{\lambda^2 - 1} \end{aligned}$$