Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Esonero 1

Cesi/Presilla – A.A. 2005–06

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

(1) (6 pt). Dire se l'insieme indicato è uno spazio vettoriale sul campo reale. Rispondere semplicemente sì o no.

(a) $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

(b) L'insieme delle matrici 3×3 tali che la somma di tutti gli elementi è uguale a zero. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

(c) L'insieme delle successioni reali convergenti. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

(d) L'insieme delle funzioni reali che si annullano almeno in un punto. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

(e) L'insieme dei polinomi $p \in P(\mathbb{R})$ che hanno tutte le radici reali. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

(f) L'insieme delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale $y'' + 2y' + y = e^x$. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

Soluzione. (a) No. Non c'è lo zero. (b) Sì. (c) Sì. (d) No. Sia $f(x) = x$ e $g(x) = 1 - x$. Allora $f + g = 1$, quindi l'insieme non è chiuso rispetto alla somma. (e) No. I polinomi $p(x) = x^2 - 2x + 1$ e $q(x) = 2x$ hanno tutte le radici reali, ma la loro somma $p(x) + q(x) = x^2 + 1$ ha radici immaginarie. (f) No. Se f è una soluzione di $y'' + 2y' + y = e^x$ la funzione $2f$ soddisfa l'equazione $y'' + 2y' + y = 2e^x$, quindi non è soluzione dell'equazione data.

(2) (5 pt). Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma su V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare <u>esplicitamente</u> che viola almeno una delle proprietà della norma.

(1) $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + |x_3| + |x_2 - x_3|$

(2) $V = \ell_2$ e $\|x\| = \sup_i |x_i|$

(3) $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\, dx$

(4) $V = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|}{1+|x|}\, dx$

(5) $V = C_1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{-1}^{1} |f(x)|\, dx$

Soluzione. (1) È una norma.

(2) È una norma (in quanto ℓ_2 è un sottospazio di ℓ_∞, quindi può "ereditare" la norma $\|\cdot\|_\infty$).

(3). Non è una norma. Si prenda $f(x) = 1$ e l'integrale diverge.

(4). Non è una norma. Si prenda $f(x) = \frac{1}{\log(1+|x|)}$ e l'integrale diverge.

(5). Non è una norma. Si prenda una funzione continua non nulla f con supporto nell'intervallo $[3, 4]$. Si avrebbe $\|f\| = 0$.

(3) (4 pt). Dimostrare che $\ell_f(\mathbb{Q})$ (l'insieme delle successioni di razionali con un numero finito di elementi non nulli) è numerabile.

Soluzione. L'idea è di scrivere $\ell_f(\mathbb{Q})$ come unione numerabile di insiemi numerabili (che sappiamo essere numerabile). Sia dunque

$$A_n := \{x \in \ell_f(\mathbb{Q}) : x_k = 0 \text{ per ogni } k > n\}.$$

È chiaro che si ha

$$\ell_f(\mathbb{Q}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \, .$$

Ma A_n può essere messo in corrispondenza biunovoca con $\mathbb{Q}^n$ tramite l'applicazione

$$A_n \ni x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots) \longleftrightarrow \hat{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n \, .$$

Poichè $\mathbb{Q}^n$ è numerabile, anche A_n è numerabile. Quindi $\ell_f(\mathbb{Q})$ è unione numerabile di insiemi numerabili, di conseguenza $\ell_f(\mathbb{Q})$ è numerabile.

(4) (2 pt). Un insieme di vettori $(u_\alpha)_{\alpha \in I}$ in uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detto *completo* se ... $\operatorname{span}\{u_\alpha : \alpha \in I\}$ è denso in V.

(5) (6 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f appartiene a $C_1(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$).

$$(a) \quad f(x) := x^4 \, e^{-|x|^\alpha} \qquad (b) \quad f(x) := \frac{1}{[\log(1+x^2)]^\alpha} \qquad (c) \quad f(x) := \frac{x^2 \, \log(1+x^8)}{1+|x|^\alpha}$$

Soluzione. (a) $\alpha > 0$. (b) Nessun α. (c) $\alpha > 3$.

(6) (3 pt). Un sottospazio W di uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detto *bislacco*[1] se W è completo, ma non è chiuso in V. Dimostrare che non esistono sottospazi bislacchi.[2]

Soluzione. Sia W un sottospazio completo di V. Faccio vedere che W è necessariamente chiuso in V. Sia infatti $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ una succesione di elementi di W tale che $x_n \to x \in V$. Poichè (x_n) è convergente essa è di Cauchy. Poichè W è completo ogni successione di Cauchy ha un limite in W. Quindi esiste $y \in W$ tale che $x_n \to y$. Per l'unicità del limite delle successioni convergenti, dal fatto che

$$x_n \to x \qquad\qquad x_n \to y$$

segue che $x = y$. Quindi $x \in W$. Ho perciò dimostrato che se $x \in V$ è un punto limite di W allora $x \in W$. Vale a dire W è chiuso in V.

Quindi ogni sottospazio completo di V è chiuso in V. Di conseguenza non esistono sottospazi bislacchi.

(7) (3 pt). Dimostrare che, se p e q sono due numeri reali tali che $1 \le p < q$, si ha $C_p(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}) \subset C_q(\mathbb{R})$.

Soluzione. Sia $f \in C_p(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R})$ e sia $M := \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$. Allora

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^q \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, |f(x)|^{q-p} \, dx \le M^{q-p} \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \, .$$

Poichè $f \in C_p(\mathbb{R})$ l'ultimo integrale è finito.

[1] questa nomenclatura *non* è universalmente adottata

[2] il che giustifica, in parte, quanto detto alla nota precedente

(8) (4 pt). Dire se la seguente espressione è un prodotto scalare in ℓ_2 o meno. Dimostrare ciò che si afferma.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty}(3x_i\, y_i - x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i)$$

Soluzione. Dimostro che è un prodotto scalare.

(0). Il prodotto scalare è ben definito, vale a dire La serie è assolutamente convergente. Infatti, usando la disuguaglianza $|ab| \leq (a^2 + b^2)/2$, si ottiene

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{\infty}|3x_i\, y_i - x_i\, y_{i+1} - x_{i+1}\, y_i| &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\big[\, |3x_i\, y_i + |x_i\, y_{i+1}| + |x_{i+1}\, y_i|\, \big] \\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\left[3x_i^2 + 3y_i^2 + x_i^2 + y_{i+1}^2 + x_{i+1}^2 + y_i^2\right] \\
&\leq \frac{5}{2}\sum_{i=1}^{\infty}(x_i^2 + y_i^2)\,.
\end{aligned}$$

Poichè $x, y \in \ell_2$ l'ultima serie è convergente.

(1). Si ha $\langle x, x\rangle \geq 0$ e $\langle x, x\rangle = 0$ se e solo se $x = 0$. Infatti

$$\begin{aligned}
\langle x, x\rangle &= \sum_{i=1}^{\infty}(3x_i^2 - 2x_i\, x_{i+1}) \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty}\big(3x_i^2 - 2|x_i\, x_{i+1}|\big) \\
&\geq \sum_{i=1}^{\infty}\big(3x_i^2 - x_i^2 - x_{i+1}^2\big) \qquad\qquad (\text{uso } |2x_ix_{i+1}| \leq x_i^2 + x_{i+1}^2) \\
&= 2\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 - \sum_{i=1}^{\infty} x_{i+1}^2 \\
&= x_1^2 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto

$$\langle x, x\rangle \geq x_1^2 + \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\,,$$

da cui si vede che $\langle x, x\rangle \geq 0$ e che $\langle x, x\rangle$ è zero se e solo se $x = 0$.

(2). La bilinearità del (candidato) prodotto scalare si verifica facilmente.