Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Esonero 1

Cesi/Presilla – A.A. 2006–07

Canale[1]	Cesi	Presilla

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

[1] Chi segue le lezioni indica il canale che sta seguendo. Chi non segue indica Presilla se è di "Fisica" e Cesi se di "Astrofisica"

(1) (5 pt). Dire se l'insieme indicato è uno spazio vettoriale sul campo reale. Rispondere semplicemente sì o no.

(a) $\{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - x_2 + x_3 = 5\}$. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(b) L'insieme delle matrici 3×3 che hanno tutti gli elementi diagonali nulli. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(c) L'insieme delle matrici 3×3 con almeno due autovalori distinti. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(d) L'insieme delle funzioni reali che convergono a zero quando $x \to \pm\infty$. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$
(e) L'insieme delle successioni reali $x = (x_1, x_2, \ldots)$ tali che $\sum_{k=1}^{\infty} k\,|x_k|^2 < +\infty$. $\boxed{\text{S}}$ $\boxed{\text{N}}$

Soluzione.

(a) No. Non contiene l'origine.
(b) Sì.
(c) No. Non contiene la matrice zero.
(d) Sì.
(e) Sì.

(2) (4 pt). Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo complesso. Dimostrare la disuguaglianza di Cauchy–Schwarz, vale a dire che

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\| \qquad \forall u, v \in V$$

Soluzione. Vedi i "Rudimenti".

(3) (5 pt). Nei casi seguenti: se $\|\cdot\|$ è una norma su V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola almeno una delle proprietà della norma.

(a) $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = 2\,|x_1| + 3\,|x_2| + |x_1 + x_2 + x_3|$
(b) $V = \ell_1$ e $\|x\| = (\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2)^{1/2}$
(c) $V = C^1[-1, 1]$ e $\|f\| = |f(0)|^2 + \sup_{x\in[-1,1]} |f'(x)|$
(d) $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{k\in\mathbb{Z}} \int_k^{k+1} |f(x)|\,dx$
(e) $V = C_c(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{-100}^{100} |f(x)|\,dx$

Soluzione.

(a) Sì.
(b) Sì.
(c) No, è violata l'omogeneità. Se $f = 1$ si ha $\|f\| = 1$, ma $\|2f\| = 4 \neq 2\,\|f\|$.
(d) Sì.
(e) No. Sia f una funzione continua non nulla con supporto contenuto nell'intervallo $[101, 102]$. Si avrebbe $\|f\| = 0$, ma $f \neq 0$.

(4) (4 pt). Dire (dimostrandolo) se lo spazio vettoriale ℓ_∞ con la norma

$$\|x\| := \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k|}{k}$$

è completo.

Soluzione. Questo spazio non è completo. Per dimostrarlo trovo una successione di Cauchy non convergente in ℓ_∞. Consideriamo la successione (di successioni) definita come

$$x^{(n)} := \left(1,\, \sqrt{2},\, \sqrt{3},\, \ldots,\, \sqrt{n-1},\, \sqrt{n},\, 0,\, 0,\, 0,\, \ldots\right).$$

Ciascun elemento $x^{(n)}$ appartiene a ℓ_∞ (appartiene addirittura a ℓ_f) perchè

$$\sup_k |x_k^{(n)}| = \sqrt{n}\,.$$

Per far vedere che la successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ è di Cauchy rispetto alla norma defnita nel testo del problema, stimo la quantità $\|x^{(n)} - x^{(j)}\|$. Supponendo che sia (ad esempio) $n > j$, si ha

$$x^{(n)} - x^{(j)} = \Big(0,\, 0,\, \dots,\, 0,\, \sqrt{j+1},\, \sqrt{j+2},\, \dots,\, \sqrt{n-1},\, \sqrt{n},\, 0,\, 0,\, 0,\, \dots\Big)\,,$$

per cui

$$\begin{aligned} \|x^{(n)} - x^{(j)}\| &= \sup_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|x_k^{(n)} - x_k^{(j)}|}{k} \\ &= \sup_{k\in\{j+1,\dots,n\}} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{j+1}\,. \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ottenuto che se $n, j \geq N$ si ha

$$\|x^{(n)} - x^{(j)}\| \leq \frac{1}{N+1}\,,$$

per cui la successione è di Cauchy. D'altra parte la successione $(x^{(n)})$ converge evidentemente all'elemento $x = (1,\, \sqrt{2},\, \sqrt{3},\, \dots)$ che non appartiene allo spazio vettoriale ℓ_∞. □

(5) (2 pt). Uno spazio vettoriale normato $(V, \|\cdot\|)$ è detto *separabile* se ...

Soluzione. contiene un sottoinsieme numerabile denso in V.

(6) (6 pt). Determinare i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali la funzione f appartiene a $C_1(\mathbb{R})$ (lo spazio delle funzioni continue f tali che $\int_\mathbb{R} |f(x)|dx < \infty$).

$$(a)\;\; f(x) := x^7\, e^{-|x|+\alpha\,\cos x} \qquad (b)\;\; f(x) := \frac{x^2 + e^{\alpha|x|}}{1+x^4} \qquad (c)\;\; f(x) := \frac{|x|\,\log(2+x^2)^\alpha}{1+|x|^\alpha}$$

(a). $\alpha \in \mathbb{R}$. Infatti

$$e^{-|x|+\alpha\,\cos x} \leq e^{-|x|+\alpha} = e^\alpha\, e^{-|x|}\,.$$

(b). $\alpha \leq 0$. Notare che il caso $\alpha = 0$ va incluso, perchè $x^2/(1+x^4)$ è integrabile.

(c). $\alpha > 2$. Infatti, se $\alpha \leq 2$, si ha, per $x \to \infty$

$$f(x) \geq \frac{|x|}{1+|x|^\alpha} \geq \frac{|x|}{1+x^2}$$

quindi f non è integrabile. Se invece $\alpha > 2$ posso scrivere $\alpha = 2 + 2\varepsilon$ per un qualche $\varepsilon > 0$. Sia

$$g(x) := \frac{1}{|x|^{1+\varepsilon}}\,.$$

Si ottiene

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|^{2+\varepsilon}}{|x|^{-\varepsilon} + |x|^{2+\varepsilon}}\; \frac{\log(2+x^2)^{2+2\varepsilon}}{|x|^\varepsilon} = 0\,.$$

Poichè g è integrabile, f è integrabile.

(7) (3 pt). Dire se ℓ_f è denso in $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$. Dimostrare ciò che si afferma.

Soluzione. Sia $x = (x_1, x_2, \dots)$ un elemento arbitrario in ℓ_1. Faccio vedere che esiste una successione $(x^{(n)})$ di elementi di ℓ_f tale che $x^{(n)} \to x$, cioè tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\|_1 = 0\,.$$

Definisco la successione approssimante $x^{(n)}$ semplicemente mediante troncamenti della successione x che voglio ottenere come limite.

$$\begin{aligned} x^{(1)} &:= (x_1, 0, 0, 0, \dots) \\ x^{(2)} &:= (x_1, x_2, 0, 0, \dots) \\ &\;\vdots \\ x^{(n)} &:= (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots) \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

Ora non resta che calcolare $\|x - x^{(n)}\|_1$ e far vedere che tende a zero. Infatti abbiamo

$$x - x^{(n)} = (0, 0, \dots, 0, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \dots)\,,$$

per cui

$$\|x - x^{(n)}\|_1 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k|\,.$$

Ma $x \in \ell_1$, quindi la serie $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ è convergente. Di conseguenza il resto n–simo di questa serie tende a zero quando $n \to \infty$, vale a dire

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x^{(n)}\|_1 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} |x_k| = 0\,. \quad \square$$

(8) (4 pt). Dire se la seguente espressione è un prodotto scalare in ℓ_2 o meno. Dimostrare ciò che si afferma.

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} [\, 3x_i y_i + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i \,]\,.$$

Soluzione. È un prodotto scalare. Vedi la soluzione di un problema praticamente identico nella sezione “problemi svolti” del sito.