Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 2

Cesi/Presilla – A.A. 2006–07

Canale[1]	Cesi	Presilla

Nome	
Cognome	

Il voto dello scritto rimpiazza gli esoneri	1	2	3

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

[1] Chi segue le lezioni indica il canale che sta seguendo. Chi non segue indica Presilla se è di "Fisica" e Cesi se di "Astrofisica"

Avvertenza: Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia. Caratteri appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Dire se l'applicazione $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V. Rispondere semplicemente sì o no.

(1) $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_1| + 2|x_2| + |x_1 - x_3|$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$
(2) $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = x_1 + x_2 + x_3$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$
(3) $V = \ell_f$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} k\,|x_k|$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$
(4) $V = C_1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ $\boxed{\text{S}}\ \boxed{\text{N}}$

Soluzione. (1) S. (2) N. (3) S. (4) N.

(2) (6 pt). Se l'affermazione è vera dire semplicemente che è vera, se è falsa esibire un controesempio esplicito. Nel seguito S, T sono operatori lineari limitati sullo spazio di Hilbert V, f è una funzione appartenente a $L_1(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}[f]$ è la trasformata di Fourier di f.

(a) Se S, T sono iniettivi $S + T$ è iniettivo.
(b) Se $\|S\| \le \|T\|$ si ha $\|S^2\| \le \|T^2\|$.
(c) Se f è a supporto compatto, $\mathcal{F}[f]$ è C^∞.

Soluzione.

(a) Falso. Si prenda $S = I$ e $T = -I$. S e T sono ovviamente iniettivi, ma $S + T = 0$ non lo è.
(b) Falso. Nello spazio $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ consideriamo le matrici

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dato $x = (x_1, x_2)$ si ha $Tx = (2x_2, 0)$, quindi $\|T\| = 2$, mentre ovviamente $\|S\| = 1$. Però $S^2 = S$, quindi $\|S^2\| = 1$, mentre $T^2 = 0$ e dunque $\|T^2\| = 0$.
(c) Vero. Infatti se $f \in L_1(\mathbb{R})$ è a supporto compatto allora per ogni intero positivo k si ha che $x^k f$ appartiene a $L_1(\mathbb{R})$. Quindi la trasformata di Fourier di f è infinitamente differenziabile.

(3) (3 pt). Nello spazio vettoriale $P(\mathbb{R})$ (i polinomi su $\mathbb{R}$) consideriamo il prodotto scalare

$$\langle f, g\rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,p(x)\,dx\,, \text{ in cui } p(x) := \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Sia $W := \text{span}\{1, x^2\}$. Determinare la proiezione ortogonale $\pi_W(x^4)$. (Ricorda: $\int_{\mathbb{R}} x^{2n}\,p(x)\,dx = (2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)$, mentre $\int_{\mathbb{R}} x^{2n-1}\,p(x)\,dx = 0$. Non è necessario calcolare il nucleo integrale del proiettore ortogonale π_W).

Soluzione. Utilizzando il procedimento di Gram–Schmidt trovo una base ortogonale $\{w_1, w_2\}$ di W

$$\begin{aligned}
w_1(x) &= 1 \\
\|w_1\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |1|^2\,p(x)\,dx = 1 \\
w_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\,w_1(x) = x^2 - \int_{\mathbb{R}} x^2\,p(x)\,dx = x^2 - 1 \\
\|w_2\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} (x^4 - 2x^2 + 1)\,p(x)\,dx = 3!! - 2 + 1 = 2\,.
\end{aligned}$$

A questo punto uso la formula esplicita della proiezione ortogonale su W

$$\pi_W(u) = \sum_k \frac{\langle u, w_k\rangle}{\|w_k\|^2}\, w_k\,,$$

che mi dà

$$\begin{aligned}
\pi_w(x^4) &= \frac{\langle x^4, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\, w_1(x) + \frac{\langle x^4, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\, w_2(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} y^4\, p(y)\, dy + \frac{1}{2}\left(\int_{\mathbb{R}} y^4\,(y^2-1)\, p(y)\, dy\right)(x^2-1) \\
&= 3!! + \frac{1}{2}(5!! - 3!!)(x^2-1) = 6x^2 - 3.
\end{aligned}$$

(4) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

$$(a)\quad D\big(e^{2x}\,|x|'''\big) \qquad\qquad (b)\quad D^2\big(e^{|x|}\big) \qquad\qquad (c)\quad D^5\big(e^{\cos x+3}\,\delta_0\big)$$

Soluzione. (a) Poichè $|x|''' = 2\delta_0'$, si ha

$$D\big(e^{2x}\,|x|'''\big) = 2D\big(e^{2x}\,\delta_0'\big) = 2\,D\big(\delta_0' - 2\delta_0\big) = 2\,\delta_0'' - 4\,\delta_0'$$

(b)

$$D^2\big(e^{|x|}\big) = D(e^{|x|}\,\mathrm{sgn}(x)) = e^{|x|} + 2\delta_0\,.$$

Nell'ultima uguaglianza abbiamo tenuto conto del fatto che la funzione $e^{|x|}\,\mathrm{sgn}(x)$, differenziabile a tratti, ha un salto pari a $+2$ in $x=0$.

(c) Poichè $e^{\cos x+3}\,\delta_0 = e^{\cos 0+3}\,\delta_0 = e^4\delta_0$, otteniamo $D^5\big(e^{\cos x+3}\,\delta_0\big) = e^4\delta_0^{(5)}$.

(5) (4 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x\in[-\pi,0) \\ x & \text{se } x\in[0,\pi] \end{cases}$$

Scrivere, oltre alla formula completa, lo sviluppo esplicito di f fino a $k=4$, vale a dire

$$\begin{aligned}
f(x) \sim \frac{a_0}{2} &+ a_1\cos x + a_2\cos(2x) + a_3\cos(3x) + a_4\cos(4x) \\
&+ b_1\sin x + b_2\sin(2x) + b_3\sin(3x) + b_4\sin(4x) + \cdots
\end{aligned}$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2} \\
a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\cos(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\sin(kx)\,dx \\
&= \frac{1}{k^2\pi}\big[\cos(kx)\big]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi}\big[\cos(k\pi)-1\big] = \frac{1}{k^2\pi}\big[(-1)^k - 1\big]\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$a_{2k} = 0 \qquad\qquad a_{2k+1} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2}\,.$$

Per quanto riguarda i b_k

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,\sin(kx)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\left[\frac{x\,\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kx)\,dx \\
&= -\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2\pi}\big[\sin(kx)\big]_0^{\pi} = -\frac{1}{k}\cos(k\pi) = \frac{(-1)^{k+1}}{k}\,.
\end{aligned}$$

Posso quindi scrivere

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} \quad + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\,\sin(kx)\,.$$

Lo sviluppo esplicito fino a $k = 4$ è

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\cos x - \frac{2}{9\pi}\cos(3x) + \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{4}\sin(4x) + \cdots\,.$$

(6) (4 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(0, \frac{x_1}{2}, 0, \frac{x_3}{4}, 0, \frac{x_5}{6}, 0, \frac{x_7}{8}, 0, \ldots\right)$$

(a) Determinare $\|T\|$
(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$
(c) Trovare gli autovalori di T
(d) Dire se $\lambda = 1/4$ appartiene o meno allo spettro continuo di T (spiegare).

Soluzione. Si trova facilmente (vedi la soluzione di esercizi molto simili) $\|T\| = 1/2$ e

$$T^*x = \left(\frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_6}{6}, 0, \frac{x_8}{8}, 0, \ldots\right)$$

Per trovare gli autovalori di T scrivo l'equazione $Tx = \lambda x$ che diventa

$$\begin{aligned}
&0 = \lambda x_1 && \frac{x_1}{2} = \lambda x_2 \\
&0 = \lambda x_3 && \frac{x_3}{4} = \lambda x_4 \\
&\vdots && \\
&0 = \lambda x_{2n-1} && \frac{x_{2n-1}}{2n} = \lambda x_{2n} \\
&\vdots &&
\end{aligned}$$

Nel caso in cui λ sia diverso da zero, la colonna di sinistra ci dice che tutte le componenti dispari di x sono nulle. Sostituendo nella colonna di destra ottengo che anche le componenti pari sono nulle, cioè $x = 0$. Quindi se $\lambda \neq 0$ l'unica soluzione dell'equazione agli autovalori $Tx = \lambda x$ è la soluzione nulla, vale a dire λ non è un autovalore di T.

Rimane da esaminare il caso $\lambda = 0$. Si verifica immediatamente che $\hat{x} = (0, 1, 0, 0, 0, \ldots)$ verifica $T\hat{x} = 0$, quindi $\lambda = 0$ è un autovalore di T. Dunque si ha

$$\sigma_p(T) = \{0\}\,.$$

$\lambda = 1/4$ non è un autovalore di T, quindi, per definizione, appartiene allo spettro continuo se e solo se l'operatore $I/4 - T$ non è suriettivo. L'equazione $(I/4 - T)x = y$ ci dà

$$\frac{x_{2k-1}}{4} = y_{2k-1} \qquad \frac{x_{2k}}{4} - \frac{x_{2k-1}}{2k} = y_{2k} \qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

che si risolve facilmente per x

$$x_{2k-1} = 4\, y_{2k-1} \qquad\qquad x_{2k} = 4\, y_{2k} + \frac{8}{k} y_{2k-1}\,.$$

Affinchè sia una buona soluzione bisogna verificare che se $y \in \ell_2$ allora $x \in \ell_2$. Infatti, grazie alla disuguagliaza $|a + b|^2 \le 2(|a|^2 + |b|^2)$, otteniamo

$$\begin{aligned} |x_{2k-1}|^2 &= 14\, |y_{2k-1}|^2 \\ |x_{2k}|^2 &\le 32 |y_{2k}|^2 + \frac{128}{k^2} |y_{2k-1}|^2\,. \end{aligned}$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(14 + \frac{128}{k^2} \right) |y_{2k-1}^2| + 32 |y_{2k}|^2 \right] \le 142 \sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 = 142\, \|y\|_2^2 < \infty\,.$$

Dunque $x \in \ell_2$ per ogni $y \in \ell_2$, per cui $I/4 - T$ è suriettivo, vale a dire $\lambda = 1/4$ fa parte dell'insieme risolvente e non dello spettro continuo.

(7) (3 pt). Dire se lo spazio vettoriale normato $(\ell_\infty, \|\cdot\|_\infty)$ è completo (dimostrare ciò che si afferma).

Soluzione. È completo (vedi i "Rudimenti").

(8) (3 pt). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ e sia g la trasformata di Fourier di f. Dimostrare che g è continua.

Soluzione. Vedi i "Rudimenti".