Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto di Settembre

Filippo Cesi e Carlo Presilla – A.A. 2002–03

Nome	
Cognome	

penalità										

Il voto dello scritto rimpiazza gli esoneri (fare una croce)	1	2	3

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

(1) (8 pt). In ciascuno dei seguenti casi dire se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale L. In caso di risposta negativa spiegare perchè non lo è.

(a) $L = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = |x_2| + 4|x_3|$

(b) $L = C^1(\mathbb{R})$ e $\|f\| = |f(3)| + \sup_{x\in\mathbb{R}} |f'(x)|$

(c) $L = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$

(d) $L = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{1/2}$

(2) (8 pt). Per ciascuna delle seguenti affermazioni dire se è vera [V] o falsa [F]. In quello che segue V è uno spazio di Hilbert e T è un operatore lineare limitato su V

(1) Se W è un sottospazio di di V e $v \in V$, allora v può essere univocamente scritto come

$$v = w + z \qquad \text{in cui } w \in W \text{ e } z \in W^{\perp}$$

(2) Il nucleo di T, $\operatorname{Ker} T$, è un sottospazio chiuso di V

(3) L'immagine di T, $\operatorname{Ran} T$, è un sottospazio chiuso di V

(4) Lo spettro di T è chiuso in $\mathbb{C}$

(3) (6 pt). Sia $L = C_2[0,1]$ e $W = \text{span}\{x, x^2\}$. Scrivere il vettore $v = 1 + x^3$ come somma

$$v = w + z \qquad \text{in cui } w \in W \text{ e } z \in W^{\perp}$$

vale dire determinare w e z (Sugg: verificate alla fine che z è perpendicolare a W)

(4) (8 pt). Sia $f \in \mathcal{K}$ ($\mathcal{K}$ è lo spazio delle funzioni infinitamente differenziabili su $\mathbb{R}$ a supporto compatto). Calcolare

$$(a) \quad (x\, e^x\, \delta_0')(f) \qquad\qquad (b) \quad (x^{10}\, \delta_0^{(10)})(f)$$

(5) (4 pt). Per quali valori di α la seguente successione appartiene a ℓ_2?

$$x_n := \frac{1}{[\log(1+n)]^\alpha}$$

(6) (6 pt). Nei casi seguenti dire se F è una distribuzione su $\mathcal{K}$. Nel caso di risposta negativa giustificare la propria affermazione

(a) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{|x|} f(x)\, dx$
(b) $F(f) = \int_{\mathbb{R}} x^{-1/4} f(x)\, dx$
(c) $F(f) = f(0) + \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx$

(7) (8 pt). Trovare la trasformata di Fourier della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{|x|} & \text{se } |x| \leq \pi \\ 0 & \text{se } |x| > \pi \end{cases}$$

(8) (10 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(\frac{x_2}{2}, 0, \frac{x_4}{4}, 0, \frac{x_6}{6}, 0, \frac{x_8}{8}, 0, \ldots\right)$$

(a) Determinare $\|T\|$

(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$

(c) Trovare gli autovalori e lo spettro continuo di T (sugg: dato che T è compatto si può utilizzare il teorema di Fredholm)

(9) (8 pt). Sia V uno spazio di Banach. Dimostrare che $\mathcal{L}(V)$ (l'insieme degli operatori lineari limitati su V) è uno spazio completo (usando la usuale norma operatoriale).