# MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 21 giugno 2003

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |
| 7 | |

Esercizio 1 Calcolare la norma dell'operatore lineare $T_n$ definito sullo spazio vettoriale $(C_2[-\pi,\pi], ||\cdot||_2)$ come

$$T_n f(x) = \left( \int_{-\pi}^{+\pi} \sin(ny) f(y) dy \right) \sin(nx) \qquad f \in C_2[-\pi,\pi]$$

Determinare $\mathrm{Ran} T_n$ e $\mathrm{Ker} T_n$.

[punteggio 5]

Esercizio 2 Dimostrare che l'operatore $cT_n$, dove $T_n$ è l'operatore del precedente esercizio e $c$ una costante opportuna, è una proiezione. Determinare la costante $c$.

[punteggio 4]

Esercizio 3 Determinare gli autovalori e lo spettro continuo dell'operatore lineare di traslazione $\tau_{-n}$ definito sullo spazio vettoriale normato $(\ell_2, ||\cdot||_2)$ come

$$\tau_{-n}x = (x_{1+n}, x_{2+n}, x_{3+n}, \cdots) \qquad x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_2$$

Si rammenti che $||\tau_{-n}|| = 1$.

[punteggio 5]

<u>Esercizio 4</u> Dimostrare che per un generico operatore lineare limitato si ha

$$\mathrm{Ker}T^* = (\mathrm{Ran}T)^\perp \qquad \overline{\mathrm{Ran}T^*} = (\mathrm{Ker}T)^\perp$$

[punteggio 4]

Esercizio 5 Calcolare la trasformata di Fourier $g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} q + \cos x & |x| \leq \pi \\ 0 & |x| > \pi \end{cases} \qquad q \in \mathbb{R}$$

Per quale valore di $q$ tale trasformata decresce all'infinito più rapidamente di $\lambda^{-1}$?

[punteggio 4]

<u>Esercizio 6</u> Calcolare la serie di Fourier della funzione periodica di periodo $2\pi$ definita come

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x & -\pi \le x \le 0 \\ \pi - x & 0 \le x \le \pi \end{cases}$$

Utilizzare il risultato per determinare la somma della serie numerica

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

[punteggio 5]

Esercizio 7 Senza giustificare la scelta, dire se le seguenti affermazioni sono vere $\boxed{\text{V}}$ o false $\boxed{\text{F}}$

(a) Se $f \in L_1[-\pi, \pi]$ è continua a tratti allora la serie di Fourier di $f$ non può convergere uniformemente a $f$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) Non esistono funzioni la cui serie di Fourier consti di un numero finito di termini. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) Se $f \in L_2[-\pi, \pi]$ allora la serie di Fourier di $f$ converge in norma a $f$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) Se $f \in L_1(-\infty, \infty)$ allora la trasformata di Fourier $g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$ è continua. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) Se $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ha valori valori puramente immaginari (cioé $\mathrm{Re} f = 0$) allora la trasformata di Fourier $g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$ soddisfa la proprietà $g(-\lambda) = -\overline{g(\lambda)}$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(f) Se $f \in L_1(-\infty, \infty)$ ha derivata continua allora anche la trasformata di Fourier $g(\lambda) = \mathcal{F}[f](\lambda)$ ha derivata continua. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(g) Se $T$ è un operatore che ha inverso limitato allora anche l'operatore aggiunto $T^*$ ha inverso limitato e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(h) Esistono operatori lineari limitati compatti il cui spettro continuo è costituito da una infinità numerabile di numeri complessi di modulo non maggiore della norma dell'operatore. $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[punteggio 8]