Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Esonero 3

Cesi/Presilla – A.A. 2006–07

Canale[1]	Cesi	Presilla

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

[1] Chi segue le lezioni indica il canale che sta seguendo. Chi non segue indica Presilla se è di "Fisica" e Cesi se di "Astrofisica"

(1) (3 pt). Sia T un operatore lineare limitato sullo spazio di Banach V. Lo spettro continuo di T è definito come l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{C}$ tali che ...

l'operatore $(\lambda I - T)$ è iniettivo ma non suriettivo.

(2) (3 pt). Sia P una proiezione ortogonale sullo spazio euclideo V. Utilizzando solo la definizione ($P^* = P$ e $P^2 = P$) dimostrare che $\|Pv\| \le \|v\|$ per ogni $v \in V$.

Soluzione. Sfruttando il fatto che P è autoaggiunto e idempotente si ha

$$\begin{aligned}\|Pv\|^2 &= \langle Pv, Pv\rangle = \langle v, P^*Pv\rangle \\ &= \langle v, P^2 v\rangle = \langle v, Pv\rangle \le \|v\|\,\|Pv\|\,,\end{aligned}$$

per cui

$$\|Pv\| \le \|v\|\,.$$

(3) (3 pt). È l'anno accademico 2012–13 e vi viene affidato il corso di Modelli e Metodi Matematici della Fisica presso la prestigiosa "Planet Dust University". In un esonero chiedete che venga sviluppata in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione $f(x) = \sin(e^{1+3x})$. Uno studente presenta una soluzione (come al solito) illeggibile in cui si capisce solo il risultato finale

$$f(x) \sim \frac{4}{9} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{5+k}} \cos(kx) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2-3}{7+4k^4} \sin(kx)\,.$$

Mentre vi apprestate a rifare il noioso calcolo per controllare l'esattezza del risultato vi accorgete che, in realtà, senza bisogno di fare conti, si può affermare che la soluzione è sbagliata. Perchè?

Soluzione. I coefficienti (a_k) e (b_k) devono soddisfare l'uguaglianza di Parseval, quindi, in particolare devono essere a quadrato sommabile. Ma

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5+k} = \infty\,.$$

(4) (4 pt). Nello spazio $(C([0,2];\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ consideriamo l'operatore

$$(Tf)(x) := g(x)\,f(x) \qquad \text{in cui} \qquad g(x) := \begin{cases} 4 & \text{se } x \in [0,1] \\ 1+3x & \text{se } x \in (1,2] \end{cases}$$

Determinare gli autovalori e lo spettro continuo di T. Per ogni autovalore λ, disegnare accuratamente il grafico di un un'autofunzione f_λ relativa a quell'autovalore.

Risp: $\sigma_p(T) = 4$, $\sigma_c(T) = (4, 7]$. Vedi il problema svolto O–p40a sul sito.

(5) (6 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(x_1, \frac{x_1}{3}, \frac{x_3}{5}, \frac{x_3}{7}, \frac{x_5}{9}, \frac{x_5}{11}, \dots\Big)$$

(a) Determinare $\|T\|$.
(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \dots)$.
(c) Trovare gli autovalori di T. Scrivere esplicitamente i 3 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, trovare un autovettore corrispondente.

Risp: (a) $\|T\| = \sqrt{10}/3$.

(b) $T^*x = \big(x_1 + x_2/3,\ 0,\ x_3/5 + x_4/7,\ 0,\ x_5/9 + x_6/11,\ 0,\ \dots\big)$.

(c) $\sigma_p(T) = \{0\} \cup \{(4k+1)^{-1} : k = 0,1,2,3,\ldots\}$. All'autovalore 0 corrisponde, ad esempio, l'autovettore

$$x = (0,1,0,0,0,0,\ldots)\,,$$

all'autovalore $(4k+1)^{-1}$ corrisponde l'autovettore

$$x = (0,0,\ldots,0,0,4k+3,4k+1,0,0,\ldots)$$

in cui gli unici due elementi non nulli si trovano in posizione $2k+1$ e $2k+2$. Riporto i 3 autovalori più grandi in modulo con i rispettivi autovettori

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 & x &= (3,1,0,0,0,0,0,0,\ldots) \\ \lambda &= \frac{1}{5} & x &= (0,0,7,5,0,0,0,0,\ldots) \\ \lambda &= \frac{1}{9} & x &= (0,0,0,0,11,9,0,0,\ldots) \end{aligned}$$

(6) (5 pt). Sia T un operatore lineare limitato sullo spazio di Hilbert V. Scrivere la relazione esistente fra il nucleo di T^* e l'immagine di T e fornirne la dimostrazione.

Risp: $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Ran} T)^\perp$ (vedi sui Rudimenti).

(7) (6 pt). Sviluppare la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi,\pi]$. Scrivere esplicitamente i primi 6 termini non nulli dello sviluppo. Utilizzare il risultato per calcolare la somma delle seguenti serie

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$
(b) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots$

Soluzione. I coefficienti a_k sono nulli perchè la funzione è dispari.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sgn}(x)\,\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k}\,.$$

Quindi

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n,\ n = 1,2,\ldots \\ \frac{4}{\pi k} & \text{se } k = 2n+1,\ n = 0,1,2,\ldots. \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere lo sviluppo richiesto

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1} \\ &= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \frac{\sin(11x)}{11} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Poichè la serie converge puntualmente in $x = \pi/2$ si ha

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\,.$$

Di conseguenza

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Analogamente, dalla convergenza nel punto $x = \pi/3$, si ottiene

$$1 = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\cdots\right],$$

per cui

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

(8) (4 pt). Sapendo che valgono gli sviluppi in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$

$$\vartheta(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin[(2k+1)x]}{2k+1} \qquad\qquad x \sim 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}$$

in cui ϑ è la funzione di Heavyside definita come $\vartheta(x) = 1$ se $x \geq 0$ e $\vartheta(x) = 0$ se $x < 0$, determinare l'analogo sviluppo per la funzione

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi]. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione f è l'integrale della ϑ, quindi, integrando termine a termine lo sviluppo della ϑ, si ottiene

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \frac{x}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2}.$$

A questo punto sostituisco x con il suo sviluppo di Fourier, e calcolo esplicitamente a_0

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Combinando il tutto ottengo

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kx)}{k}.$$