Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Esonero 3

Cesi/Presilla – A.A. 2005–06

Nome	
Cognome	

penalità										

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
penalità	
ritardo	
totale	
coeff.	
voto in trentesimi	

(1) (8 pt). Sia T l'operatore su ℓ_2 definito come

$$Tx = \Big(\frac{x_2}{2}, x_1, \frac{x_4}{4}, x_3, \frac{x_6}{6}, x_5, \frac{x_8}{8}, x_7, \dots\Big)$$

(a) Determinare $\|T\|$.
(b) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \dots)$.
(c) Trovare gli autovalori di T (per ogni autovalore esibire un autovettore corrispondente).
(d) Dire se T è suriettivo (dimostrando ciò che si afferma).

Soluzione. (a) Poichè

$$\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(Tx)_k|^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|_2^2$$

si ha $\|T\| \le 1$. D'altra parte, ponendo $y = (1, 0, 0, \dots)$, si ottiene $Ty = (0, 1, 0, 0, \dots)$, per cui $\|Ty\|_2 = 1 = \|y\|_2$ e quindi $\|T\| = 1$.

(b) Per determinare T^* procediamo come segue

$$\begin{aligned}\langle T^*x, y\rangle = \langle x, Ty\rangle &= \Big\langle \big(x_1, x_2, x_3, \dots\big)\,,\, \Big(\frac{y_2}{2},\, y_1,\, \frac{y_4}{4},\, y_3,\, \frac{y_6}{6},\, y_5 \dots\Big) \Big\rangle \\ &= \frac{x_1\, y_2}{2} + x_2\, y_1 + \frac{x_3\, y_4}{4} + x_4\, y_3 + \frac{x_5\, y_6}{6} + x_6\, y_5 + \cdots \\ &= x_2\, y_1 + \frac{x_1}{2}\, y_2 + x_4\, y_3 + \frac{x_3}{4}\, y_4 + \cdots = \langle T^*x, y\rangle\,,\end{aligned}$$

per cui si ha

$$T^*x = \Big(x_2,\, \frac{x_1}{2},\, x_4,\, \frac{x_3}{4},\, x_6,\, \frac{x_5}{6}, \dots\Big)\,.$$

(c) L'equazione agli autovalori $Tx = \lambda x$ si scrive come

$$\frac{x_{2k}}{2k} = \lambda\, x_{2k-1} \qquad\qquad x_{2k-1} = \lambda\, x_{2k} \qquad\qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

e quindi

$$(1 - 2k\lambda^2)x_{2k} = 0 \qquad\qquad x_{2k-1} = \lambda\, x_{2k} \qquad\qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Se $2k\lambda^2 \neq 1$ per ogni $k = 1, 2, \dots$ allora l'unica soluzione è $x = 0$, quindi λ non è autovalore. Se esiste un intero positivo k tale che $\lambda = 1/\sqrt{2k}$, allora esiste una soluzione non nulla data da

$$x = (0, 0, \dots, 0, 1, \sqrt{2k}, 0, 0, \dots)\,,$$

in cui gli unici elementi diversi da zero sono x_{2k-1} e x_{2k}. Se infine esiste un intero positivo k tale che $\lambda = -1/\sqrt{2k}$, allora esiste una soluzione non nulla data da

$$x = (0, 0, \dots, 0, 1, -\sqrt{2k}, 0, 0, \dots)\,.$$

L'insieme degli autovalori di T è quindi

$$\{\pm 1/\sqrt{2k} : k = 1, 2, 3, \dots\}\,.$$

(d) Voglio vedere se, per ogni $y \in \ell_2$, esiste $x \in \ell_2$ tale che $Tx = y$. Questa equazione si scrive

$$\frac{x_{2k}}{2k} = y_{2k-1} \qquad\qquad x_{2k-1} = y_{2k} \qquad\qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Se scelgo $y_k = 1/k$ ottengo.

$$x_{2k} = \frac{2k}{2k-1} \qquad\qquad x_{2k-1} = \frac{1}{2k} \qquad\qquad k = 1, 2, 3, \dots$$

Questa successione x chiaramente non appartiene a ℓ_2. Quindi $y \notin \operatorname{Ran} T$ e dunque T non è suriettivo.

(2) (4 pt). Nello spazio $(C([0,\pi];\mathbb{C}), \|\cdot\|_u)$ consideriamo l'operatore

$$(Tf)(x) := g(x)\, f(x) \qquad \text{in cui} \qquad g(x) := \begin{cases} \sin(x) & \text{se } x \in [0,\pi/2) \\ 1 & \text{se } x \in [\pi/2,\pi] \end{cases}$$

Determinare gli autovalori e lo spettro continuo di T. Per ogni autovalore λ, disegnare accuratamente (avete presente Giotto?) il grafico di un un'autofunzione f_λ relativa a quell'autovalore.

Soluzione.

$$\sigma_p(T) = \{1\} \qquad \sigma_c(T) = [0,1)\,.$$

Per la soluzione completa vedi problema moooolto (troppo?) simile, in E3 anno 2004–05.

(3) (4 pt). Trovare una successione di funzioni $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ nello spazio di Hilbert $L_2[0,1]$ tale che

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_2 = 0\,,$$

ma $f_n(x)$ non converge puntualmente a zero per alcun $x \in [0,1]$. (Questo dimostra in modo eclatante che la convergenza rispetto alla norma $\|\cdot\|_2$ non implica la convergenza puntuale).

Soluzione. L'idea è una successione di funzioni che hanno un picco sempre più stretto e che "continuano a girare sull'intervallo $[0,1]$". Sia I_A la funzione caratteristica dell'insieme A, vale a dire

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \in A^c. \end{cases}$$

Costruisco la mia successione di funzioni nel modo seguente.

$$\begin{array}{lllll} f_1 = I_{[0,1]} & & & & \\ f_2 = I_{[0,1/2]} & f_3 = I_{[1/2,1]} & & & \\ f_4 = I_{[0,1/4]} & f_5 = I_{[1/4,1/2]} & f_6 = I_{[1/2,3/4]} & f_7 = I_{[3/4,1]} & \\ f_8 = I_{[0,1/8]} & f_9 = I_{[1/8,1/4]} & f_{10} = I_{[1/4,3/8]} & f_{11} = I_{[3/8,1/2]} & f_{12} = I_{[1/2,5/8]} \quad \ldots \end{array}$$

Per scrivere la formula generale, dato un intero positivo n, definisco un altro intero non negativo $\alpha(n)$ come

$$\alpha(n) := \lfloor \log_2 n \rfloor$$

in modo tale che si ha

$$2^{\alpha(n)} \le n < 2^{\alpha(n)+1}\,.$$

A questo punto definisco (provare a calcolare i primi n per credere)

$$f_n := I_{\left[2^{-\alpha(n)}(n-2^{\alpha(n)})\,,\,2^{-\alpha(n)}(n+1-2^{\alpha(n)})\right]}\,.$$

Si verifica che

$$\|f_n\|_2^2 = 2^{-\alpha(n)}$$

quindi $\|f_n\|_2 \to 0$. D'altra parte comunque fisso $x \in [0,1]$ si ha che

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ non esiste!}$$

Il motivo è il seguente. Per ogni k, il supporto delle funzioni

$$f_{2^k},\, f_{2^k+1},\, f_{2^k+2},\, \ldots,\, f_{2^{k+1}-2},\, f_{2^{k+1}-1}$$

ricopre l'intero intervallo $[0,1]$. Quindi esiste almeno un valore di n compreso fra 2^k e $2^{k+1}-1$ tale che $f_n(x) = 1$. Poichè questo è vero per ogni k, la successione $f_n(x)$ contiene un numero infinito di uni e (ovviamente) un numero infinito di zeri, di conseguenza non è convergente.

(4) (4 pt). Vero o falso? Se è vero dimostrarlo, se è falso fornire un controesempio: se V e Z due spazi vettoriali normati e Z è completo allora $\mathcal{L}(V, Z)$ (l'insieme di tutti gli operatori lineari limitati da V in Z) è completo (rispetto alla norma operatoriale).

Soluzione. Vero. Vedi i "Rudimenti" o un libro di analisi funzionale.

(5) (4 pt). Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$ la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Scrivere, oltre alla formula completa, lo sviluppo esplicito di f fino a $k = 4$, vale a dire

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + a_2 \cos(2x) + a_3 \cos(3x) + a_4 \cos(4x) + b_1 \sin x + b_2 \sin(2x) + b_3 \sin(3x) + b_4 \sin(4x)$$

Soluzione.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2} \\
a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \cos(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, \cos(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x\, \sin(kx)}{k} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \sin(kx)\, dx \\
&= \frac{1}{k^2\pi} \big[\cos(kx)\big]_0^{\pi} = \frac{1}{k^2\pi} \big[\cos(k\pi) - 1\big] = \frac{1}{k^2\pi} \big[(-1)^k - 1\big] .
\end{aligned}$$

Quindi

$$a_{2k} = 0 \qquad\qquad a_{2k+1} = -\frac{2}{\pi(2k+1)^2} .$$

Per quanto riguarda i b_k

$$\begin{aligned}
b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \sin(kx)\, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x\, \sin(kx)\, dx \\
&= -\frac{1}{\pi} \left[\frac{x\, \cos(kx)}{k} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(kx)\, dx \\
&= -\cos(k\pi) + \frac{1}{k^2\pi} \big[\sin(kx)\big]_0^{\pi} = -\frac{1}{k} \cos(k\pi) = \frac{(-1)^{k+1}}{k} .
\end{aligned}$$

Posso quindi scrivere

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos[(2k+1)x]}{(2k+1)^2} \quad + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kx) .$$

Lo sviluppo esplicito fino a $k = 4$ è

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \cos x - \frac{2}{9\pi} \cos(3x) + \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x) + \frac{1}{3} \sin(3x) - \frac{1}{4} \sin(4x) + \cdots .$$

(6) (3 pt). Per ciascuna delle seguenti funzioni $f : [-\pi, \pi] \mapsto \mathbb{R}$ sia S_n la somma parziale n–esima della serie di Fourier associata. Calcolare il limite $S(x) := \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

$$(a)\ \ f(x) = \cos(1 + x^4) \qquad (b)\ \ f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [-\pi, 0) \\ 1 - x & \text{se } x \in [0, \pi] \end{cases} \qquad (c)\ \ f(x) = 1 + x^3$$

Soluzione. (a) $S(x) = \cos(1 + x^4)$ per ogni $x \in [-\pi, \pi]$.

(b) $S(x) = f(x)$ per $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$. $S(0) = 1/2$. $S(-\pi) = S(\pi) = (-\pi + 1 - \pi)/2 = 1/2 - \pi$.

(c) $S(x) = (1 + x^3)$ per $x \in (-\pi, \pi)$. $S(-\pi) = S(\pi) = (1 - \pi^3 + 1 + \pi^3)/2 = 1$.

Per una soluzione completa di spiegazione si veda un problema analogo sui "Rudimenti".

(7) (4 pt). Nel seguito T è un operatore lineare limitato sullo spazio di Hilbert V. Vero o falso?

(a) Se T ha l'autovalore $\lambda = 1 - i$, allora $\|T\| \geq \sqrt{2}$. V F
(b) Se T ha tutti gli autovalori reali, allora T è autoaggiunto. V F
(c) Se $\|T\| \geq 1$, allora $\|T^2\| \geq \|T\|$. V F
(d) Se P è un proiettore ortogonale, allora $I - P$ è un proiettore ortogonale. V F
(e) Se P è un proiettore ortogonale, allora non può avere come autovalore $\lambda = 1/2$. V F
(f) Se $f \in L_2[-\pi, \pi]$ la serie di Fourier di f converge ad f rispetto alla norma $\| \cdot \|_2$. V F
(g) Se $f \in L_2[-\pi, \pi]$ è continua la serie di Fourier di f converge puntualmente ad f. V F
(h) Se $f \in L_2[-\pi, \pi]$ è continua la serie di Fourier di f' si può ottenere derivando termine a termine la serie di Fourier di f. V F

Soluzione. (a) Vero, perchè $\sigma(T) \subset \overline{B}_{\|T\|}$. (b). Falso. l'operatore su $\mathbb{R}^2$ associato alla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ha come unico autovalore lo zero, ma non è (evidentemente) autoaggiunto. (c) Falso. L'operatore associato alla matrice A del punto (b) ha norma 1 (verificare), ma $A^2 = 0$. (d) Vero. Infatti $(I - P)^* = I^* - P^* = I - P$. Inoltre $(I - P)^2 = I - 2P + P^2 = I - P$. (e) Vero. Se λ è un autovalore di P, λ è reale perchè P è autoaggiunto. Inoltre dalla relazione $P^2 = P$ si deduce facilmente che deve essere $\lambda^2 = \lambda$. Quindi λ può essere solo 0 oppure 1. (f) Vero. (g) Falso, la condizione di continuità non è sufficiente per la convergenza puntuale. (h) Falso. Un controesempio è dato dalla funzione $f(x) = x$.

(8) (3 pt). Sapendo che valgono i seguenti sviluppi in serie di Fourier in $[-\pi, \pi]$

$$x \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\sin(kx)}{k} \qquad\qquad x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} \cos(kx)$$

determinare l'analogo sviluppo per la funzione $f(x) = x^3$.

Soluzione. È possibile integrare la serie di Fourier di x^2 termine a termine, a patto di ...(vedi i "Rudimenti"). In questo modo si trova

$$x^3 \sim 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(k\pi)^2 - 6}{k^3} \sin(kx)\,.$$