MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2002/2003 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 30 maggio 2003

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Esercizio 1 Siano $v_1 = (1, 1, 0)$ e $v_2 = (0, 1, 2)$ due vettori di $\mathbb{R}^3$ e $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$. Determinare la matrice $\mathcal{P}$ che rappresenta, nella base canonica di $\mathbb{R}^3$, la proiezione ortogonale π_W su W.

[punteggio 5]

Esercizio 2 Si consideri il sottospazio chiuso $W = \mathrm{span}\{1, x\}$ dello spazio euclideo $C_2[0,1]$ con prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx$. Determinare la proiezione ortogonale $(\pi_w h)(x)$ con $h(x) = e^x$.

[punteggio 4]

<u>Esercizio 3</u> Calcolare, senza fornire la dimostrazione della formula generale utilizzata, la norma del funzionale lineare

$$\varphi_a(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \qquad \text{con} \qquad x \in \ell_{3/2} \qquad a_k = 5^{-k}$$

[punteggio 4]

Esercizio 4 Determinare la derivata della distribuzione regolare φ_g associata alla funzione

$$g(x) = e^{-x^2} \operatorname{sgn}(x)\ \operatorname{sgn}(x-3)$$

[punteggio 4]

Esercizio 5 Dimostrare che, nel senso delle distribuzioni, vale l'equazione differenziale

$$x\frac{d}{dx}\left(\cos(x)\ \theta - \sin(x)\ \delta_0\right) + x\sin(x)\ \theta = 0$$

dove θ è la distribuzione di Heavyside e δ la distribuzione delta di Dirac.

[punteggio 5]

Esercizio 6 Calcolare la norma degli operatori lineari di traslazione $\tau_{\pm n}$ definiti sullo spazio vettoriale normato $(\ell_p,\ ||\cdot||_p)$ come

$$(\tau_{+n}x)_i = \begin{cases} 0 & 1 \leq i \leq n \\ x_{i-n} & i \geq n+1 \end{cases} \qquad (\tau_{-n}x)_i = x_{i+n} \qquad x = (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_p$$

[punteggio 5]

Esercizio 7 Senza giustificare la scelta, dire se le seguenti afferazioni sono vere $\boxed{\text{V}}$ o false $\boxed{\text{F}}$

(a) Lo spazio dei funzionali lineari continui su ℓ_1 è isomorfo a ℓ_∞ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(b) Una successione $(x_k)_{k=1}^\infty$ nello spazio lineare normato $(L, ||\cdot||)$ si dice debolmente convergente a $x \in L$ se esiste almeno un funzionale lineare continuo $F \in L^*$ tale che $\lim_{k\to\infty} F(x_k) = F(x)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(c) La derivata n-sima di una distribuzione $F \in \mathcal{K}^*$ è data dalla formula $F^{(n)}(f) = F(f^{(n)})$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(d) Per la distribuzione δ di Dirac si ha $x\delta_0^{(2)} = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(e) $F(f) = \int_\mathbb{R} (\log|x|)^2 f(x)dx$ è una distribuzione per $f \in \mathcal{K}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(f) $F(f) = f'(3) + \int_\mathbb{R} |f(x)|dx$ è una distribuzione per $f \in \mathcal{K}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(g) $F(f) = \int_\mathbb{R} \arcsin(x)f(x)dx$ è un funzionale lineare continuo per $f \in C_1(\mathbb{R})$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

(h) La funzione θ di Heavyside può essere scritta come
$\theta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \lim_{a\to\infty} \int_{|t|\le a} \exp(itx)/[2\pi i(t - i\varepsilon)^2]dt$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

[punteggio 8]