MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova A5 – 1 febbraio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\cos(\sqrt{z}) = 0.$$

[punteggio 5]

Posto $w = \sqrt{z}$, si ha

$$\frac{e^{\mathrm{i}w} + e^{-\mathrm{i}w}}{2} = 0$$

ovvero

$$\left(e^{\mathrm{i}w}\right)^2 = -1$$

che fornisce

$$\mathrm{i}w = \log(\pm\mathrm{i}) = \log\left(1e^{\pm\mathrm{i}\pi/2}\right) = \ln 1 + \mathrm{i}(\pm\pi/2 + 2k\pi), \qquad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.$$

In conclusione, si ha

$$\sqrt{z} = (2n+1)\pi/2, \qquad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$$

e quindi le radici cercate sono

$$z = ((2n+1)\pi/2)^2 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Esercizio 2 Sia $f : (S,d) \mapsto (\Omega,\rho)$ una funzione tra i due spazi metrici (S,d) e (Ω,ρ). Dimostrare che se f è continua in S e S è compatto allora f è uniformemente continua in S.

[punteggio 5]

Si veda il Teorema 3.29 a pagina 36 del testo di riferimento.

Esercizio 3 Si consideri la funzione $f(z) = (3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2$. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di f.

[punteggio 6]

In quanto composizione di funzioni continue in tutto $\mathbb{C}$, f è continua in tutto $\mathbb{C}$. Per studiare la derivabilità, si osservi che, posto $z = x + \mathrm{i}y$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 3xy^2 + \mathrm{i}(y^3 + 3x^2 y),$$

pertanto $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + \mathrm{i}y) = x^3 + 3xy^2$ e $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(x + \mathrm{i}y) = y^3 + 3x^2 y$. Le funzioni u e v sono derivabili in tutto $\mathbb{R}^2$ con derivate

$$\begin{aligned} &u_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2, \qquad u_y(x, y) = 6xy, \\ &v_x(x, y) = 6xy, \qquad v_y(x, y) = 3y^2 + 3x^2, \end{aligned}$$

continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, sono quindi

$$\begin{aligned} &3x^2 + 3y^2 = 3x^2 + 3y^2, \\ &6xy = -6xy. \end{aligned}$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, la seconda solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Segue che f è derivabile solo nei punti degli assi coordinati. In nessuno di tali punti però la f è analitica. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ la palla $B(z, \varepsilon)$, con z reale o immaginario puro, contiene punti w tali che $\mathrm{Re}\, w \neq 0$ e $\mathrm{Im}\, w \neq 0$ in cui la f è non derivabile.

<u>Esercizio 4</u> Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$, con $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definita da

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2}.$$

Mostrare che f non ha primitiva in D.

[punteggio 6]

Nel dominio D, aperto e connesso, f ha primitiva se e solo se $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = 0$ per ogni cammino γ chiuso, regolare a tratti, contenuto in D. Si consideri la circonferenza γ centrata nell'origine, di raggio 1, orientata positivamente. Per la formula integrale di Cauchy applicata alla funzione intera $\sin z$, risulta

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_\gamma \frac{e^z}{(z-0)^2}\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}e^z\bigg|_{z=0} = 2\pi\mathrm{i}e^0 \neq 0.$$

Pertanto f non ha primitiva in D.

Esercizio 5 Stabilire se esiste $\lim_{z\to 0} f'''(z)$, dove

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)^2(z-2)}.$$

In caso affermativo determinare il valore di tale limite.

[punteggio 6]

La funzione $f(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$ e uno doppio in $z = 1$ ed è altrove analitica. Pertanto $f(z)$ e tutte le sue derivate sono analitiche in $z = 0$. In particolare $f'''(z)$ è continua in $z = 0$ e risulta

$$\lim_{z\to 0} f'''(z) = f'''(0).$$

Il modo più rapido per determinare il valore di $f'''(0)$ è il seguente. Nella regione $0 < |z| < 1$ la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di Taylor e, ricordando il risultato notevole della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \left(\frac{1}{1-z}\right)^2 \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+z+z^2+z^3+\dots\right)^2 \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2z^n}\left(1+2z+3z^2+4z^3+\dots\right) \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{4}+\frac{z^3}{8}+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{5}{2}z+\frac{17}{4}z^2+\frac{49}{8}z^3+\dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}-\frac{5}{4}z-\frac{17}{8}z^2-\frac{49}{16}z^3+O(z^4).
\end{aligned}$$

Da questa espressione e dall'unicità dello sviluppo in serie di Taylor segue immediatamente

$$f'''(0) = -\frac{49}{16}3! = -\frac{147}{8}.$$

Esercizio 6 Calcolare l'integrale reale

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}.$$

[punteggio 5]

Ponendo $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = z$ si ha $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/\mathrm{i}z$, $\cos\theta = (z+z^{-1})/2$ e

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} = \int_\gamma f(z)\mathrm{d}z,$$

dove $\gamma(\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 \le \theta \le 2\pi$ e

$$f(z) = \frac{-2\mathrm{i}z}{(z^2+2az+1)^2}.$$

La funzione f ha due poli doppi in $z_\pm = -a \pm \sqrt{a^2-1}$. Si osservi che $|z_-| > 1$ e, poiché $z_+ z_- = 1$, $|z_+| < 1$. Pertanto il polo in z_+ è interno al cammino γ mentre quello in z_- è esterno. Il teorema dei residui fornisce

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(a+\cos\theta)^2} &= 2\pi\mathrm{i} \operatorname*{Res}_{z=z_+} f(z) \\
&= 2\pi\mathrm{i} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{-2\mathrm{i}z}{(z-z_-)^2}\right|_{z=z_+} \\
&= 2\pi\mathrm{i}\, \frac{2\mathrm{i}(z_+ + z_-)}{(z_+ - z_-)^3} \\
&= \frac{\pi a}{(a^2-1)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Nel caso particolare $a = \sqrt{2}$ si ha

$$\int_0^\pi \frac{\mathrm{d}\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^2} = \pi\sqrt{2}.$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2015/2016 – Prof. C. Presilla

Prova B5 – 1 febbraio 2017

Cognome	
Nome	
Matricola	

iscritto al secondo anno	
iscritto al terzo anno	
fuoricorso o con più di 155 CFU	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Sia $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ una successione di ℓ_1. Dimostrare che $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 = 0$ implica $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty = 0$. Portare un esempio che il viceversa è falso.

[punteggio 5]

Poiché $x^{(n)} \in \ell_1$, si ha $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| < \infty$. Se $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 = 0$, allora

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| = 0.$$

D'altro canto

$$0 \leq \|x^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k^{(n)}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}|.$$

Prendendo il limite $n \to \infty$ segue che

$$\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_\infty = 0.$$

Per dimostrare che l'implicazione opposta è falsa, si consideri la successione

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1/n & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Evidentemente risulta $x^{(n)} \in \ell_1$ con

$$\|x^{(n)}\|_\infty = \sup_{k\geq 1} |x_k^{(n)}| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

D'altro canto per ogni n si ha

$$\|x^{(n)}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k^{(n)}| = 1$$

e quindi $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)}\|_1 \neq 0$.

Esercizio 2 Sia W un sottospazio chiuso di uno spazio di Hilbert separabile $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dimostrare che ogni vettore $v \in V$ può essere scritto come

$$v = w + z, \qquad w \in W, \quad z \in W^{\perp}.$$

Omettere la dimostrazione dell'univocità di tale decomposizione.

[punteggio 5]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 95.

Esercizio 3 Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato

a) $xe^x\delta_0''$ b) $\delta_0[(x-1)e^x]$ c) $D^2(|\sin x|)$

[punteggio 6]

a) Ricordando l'identità valida per ogni $h \in C^\infty(\mathbb{R})$

$$h\delta_0^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} h^{(k)}(0)\delta_0^{(n-k)},$$

e ponendo $h(x) = xe^x$, si ha

$$xe^x\delta_0'' = -2\delta_0' + 2\delta_0.$$

b) Ricordando che se $b(x)$ ha zeri semplici isolati in x_k, $k = 1, 2, \ldots$, vale la formula

$$\delta_0[b(\cdot)] = \sum_k \frac{1}{|b'(x_k)|}\delta_{x_k},$$

si ha

$$\delta_0[(x-1)e^x] = e^{-1}\delta_1,$$

ovvero, in un'altra possibile notazione,

$$\delta((x-1)e^x) = e^{-1}\delta(x-1).$$

c) Osservando che $|\sin x| = \operatorname{sgn}(\sin x)\sin x$ è una funzione continua mentre la sua derivata prima $\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x$ ha discontinuità di valore 2 nei punti $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, si ha

$$\begin{aligned}
D^2(|\sin x|) &= D^2(\varphi_{|\sin x|}) \\
&= D(D(\varphi_{\operatorname{sgn}(\sin x)\sin x})) \\
&= D(\varphi_{\operatorname{sgn}(\sin x)\cos x}) \\
&= \varphi_{-\operatorname{sgn}(\sin x)\sin x} + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{k\pi} \\
&= -|\sin x| + \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2\delta_{k\pi}.
\end{aligned}$$

Esercizio 4 Sia S l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$S(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (\frac{x_2}{2^1}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_4}{2^3}, \frac{x_4}{2^4}, \frac{x_6}{2^5}, \frac{x_6}{2^6}, \dots).$$

Determinare $\|S\|$ e S^*. Stabilire se S è invertibile e, in caso affermativo, determinare S^{-1}.

[punteggio 5]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}\|Sx\|_2^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \left(\frac{1}{(2^{2k-1})^2} + \frac{1}{(2^{2k})^2} \right) \le \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} \right) \sum_{k=1}^{\infty} |x_{2k}|^2 \\ &\le \frac{5}{16} \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \le \frac{5}{16} \|x\|_2^2\end{aligned}$$

che implica $\|S\| \le \sqrt{5}/4$. D'altro canto, per $x = (0, 1, 0, 0, \dots) \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha $Sx = (1/2, 1/4, 0, 0, \dots)$ e quindi

$$\frac{\|Sx\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{5}/4}{1} = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

che implica $\|S\| \ge \sqrt{5}/4$. In conclusione $\|S\| = \sqrt{5}/4$.
L'operatore aggiunto S^* è definito dalla relazione $\langle S^*x, y \rangle = \langle x, Sy \rangle$ $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned}\langle S^*x, y \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} (S^*x)_k \overline{y_k} \\ \langle x, Sy \rangle &= \left(\frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2} \right) \overline{y_2} + \left(\frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4} \right) \overline{y_4} + \left(\frac{x_5}{2^5} + \frac{x_6}{2^6} \right) \overline{y_6} + \dots\end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di x e y segue

$$S^*(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, \dots) = (0, \frac{x_1}{2^1} + \frac{x_2}{2^2}, 0, \frac{x_3}{2^3} + \frac{x_4}{2^4}, 0, \frac{x_5}{2^5} + \frac{x_6}{2^6}, \dots).$$

L'operatore S non è iniettivo, infatti

$$\operatorname{Ker} S = \{x \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ Sx = 0\} = \{x \in \ell_2(\mathbb{C}) : \ x_{2k} = 0, \ k = 1, 2, \dots\}.$$

Quindi S non è invertibile.

Esercizio 5 Sia T l'operatore lineare in $(C[0,2\pi];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = \sin(x)f(x)$$

Determinare lo spettro di T, l'aggiunto T^* e la norma $\|T\|$.

[punteggio 6]

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI-T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI-T)f = 0$ è soddisfatta per $f \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ solo da $f = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)f = 0$ implica

$$(z - \sin(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [0,2\pi]$$

- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, il fattore $z-\sin(x)$ non si annulla mai per $x \in [0,2\pi]$ e quindi $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z \in [-1,1]$, il fattore $z - \sin(x)$ si annulla nei punti discreti $x_z = \arcsin z$. Per $x \neq x_z$ si ha $f(x) = 0$ e dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.

Si studi ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $(C[0,2\pi];\mathbb{C})$ ovvero se $\forall h \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ esiste $f \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)f = h$. Affinchè ciò accada deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - \sin(x)} \qquad \forall x \in [0,2\pi]$$

- Se $z \in [-1,1]$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI - T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
- Se $z \in \mathbb{C}\setminus[-1,1]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[0,2\pi]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \emptyset$, $\sigma_c(T) = [-1,1]$, $\rho(T) = \mathbb{C}\setminus[-1,1]$.
L'operatore aggiunto T^* è definito dalla relazione $\langle T^*f, g\rangle = \langle f, Tg\rangle$ $\forall f,g \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$. Assumendo l'usuale prodotto scalare, si ha

$$\langle T^*f, g\rangle = \int_0^{2\pi} (T^*f)(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x,$$
$$\langle f, Tg\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{\sin(x)g(x)}\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} f(x)\sin(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x.$$

Dall'arbitrarietà di f e g segue che $(T^*f)(x) = \sin(x)f(x)$ cioè T è autoaggiunto.
Per ogni $f \in (C[0,2\pi];\mathbb{C})$ si ha

$$\|Tf\|_u = \sup_{x\in[0,2\pi]} |\sin(x)f(x)| \leq \sup_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| = \|f\|_u$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{f\neq 0} \frac{\|Tf\|_u}{\|f\|_u} \leq 1.$$

Poiché $\sigma(T) \subset \overline{B}(0,\|T\|)$ e $\sigma(T) = [-1,1]$, deve necessariamente risultare $\|T\| \geq 1$. Alternativamente, si osservi che per $f(x) = 1$ si ha $\|f\|_u = \|Tf\|_u = 1$ e quindi $\|T\| \geq 1$. Si conclude che $\|T\| = 1$.

Esercizio 6 Calcolare la trasformata di Fourier della funzione $x\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}$. Si rammenti il risultato notevole $\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4}$.

[punteggio 6]

A partire dal risultato notevole

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-x^2}](\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}\mathrm{e}^{-\lambda^2/4},$$

e utilizzando le proprietà generali della trasformata di Fourier,

$$\mathcal{F}[f(ax)](\lambda) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}[f(x)](\lambda/a), \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

$$\mathcal{F}[f(x+b)](\lambda) = \mathcal{F}[f(x)](\lambda)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda b}, \qquad b \in \mathbb{R},$$

si ha

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3x^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12},$$

$$\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda 2}.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[x\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) &= \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\mathcal{F}[\mathrm{e}^{-3(x-2)^2}](\lambda) \\
&= \mathrm{i}\sqrt{\frac{\pi}{3}}\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}\left(-\frac{\lambda}{6} - 2\mathrm{i}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{3}}\left(2 - \frac{\mathrm{i}\lambda}{6}\right)\mathrm{e}^{-\lambda^2/12-2\mathrm{i}\lambda}.
\end{aligned}$$