MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2008/2009 – Prof. F. Cesi e C. Presilla

Prova Finale 2 Febbraio 2010

Cognome	
Nome	

Canale	Cesi (Astrofisica)	Presilla (Fisica)

intendo MANTENERE il voto degli esoneri	1	2

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

Esercizio 1 Determinare il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\log n)^n}{(1+i)^{n^2}} z^n$$

[punteggio 4]

Il coefficiente n-esimo della serie è

$$a_n = \left(\frac{\log n}{(1+i)^n} \right)^n$$

Inoltre

$$|a_n|^{1/n} = \frac{\log n}{|1+i|^n} = \frac{\log n}{2^{n/2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

e quindi

$$R = \infty$$

Esercizio 2 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sinh z = -i\pi$$

e dire quante di queste cadono all'interno della regione $|\mathrm{Im}\, z| \leq 2\pi$.

[punteggio 4]

Si ha

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i\pi$$

ovvero

$$e^{2z} + 2i\pi e^z - 1 = 0$$

le cui soluzioni sono

$$e^z = -i\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1}\right)$$

Pertanto le soluzioni dell'equazione $\sinh z = -i\pi$ sono

$$\begin{aligned} z &= \log\left[-i\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-1}\right)\right] \\ &= \ln\left(\pi \pm \sqrt{\pi^2-1}\right) + i\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{aligned}$$

Di queste, solo due, quelle ottenute per $k = 0$ e $k = 1$, cadono all'interno della regione $|\mathrm{Im}\, z| \leq 2\pi$.

Esercizio 3 Sviluppare in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ la funzione

$$f(z) = \int_0^z e^{s^2}\ ds$$

e determinare il raggio di convergenza della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

Posto $g(z) = \exp(z^2)$ e cambiando $z \to z^2$ nello svilippo in serie di Taylor di $\exp(z)$, per $|z| < \infty$ si ha

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{n!}$$

Dal teorema sull'integrazione delle serie di potenze si ottiene

$$f(z) = \int_0^z g(s)\ ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_0^s s^{2n}\ ds = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\ \frac{s^{2n+1}}{2n+1}\Bigg]_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Il raggio di convergenza della serie è infinito come quello della serie che rappresenta $g(z)$. Alternativamente, un calcolo diretto fornisce

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n+1)!}{(2n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+3)(n+1)}{2n+1} = \infty$$

Esercizio 4 Trovare la parte singolare della funzione

$$f(z) = \frac{e^z \sin z}{z(1-\cos z)}$$

in corrispondenza della singolarità in $z = 0$.

[punteggio 5]

Espandendo in serie di Mac Laurin le funzioni esponenziale, seno e coseno, si ha

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{\left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots\right)\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots\right)}{z\left(\frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots\right)} \\
&= \frac{2}{z^3}\,\frac{z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots}{1 - \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)} \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots\right) \\
&\quad \times \left[1 + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right) + \left(\frac{1}{12}z^2 - \frac{1}{360}z^4 + \dots\right)^2 + \dots\right] \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{30}z^5 + \dots\right)\left(1 + \frac{1}{12}z^2 + \frac{7}{720}z^4 + \dots\right) \\
&= \frac{2}{z^3}\left(z + z^2 + \frac{5}{12}z^3 + \frac{1}{12}z^4 - \frac{1}{720}z^5 + \dots\right) \\
&= \frac{2}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{5}{6} + \frac{z}{6} - \frac{z^2}{360} + \dots
\end{aligned}$$

Pertanto $f(z)$ ha in $z = 0$ un polo di ordine 2 con

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = 2$$

Esercizio 5 Calcolare il valore del seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{x^2+16}\, dx$$

[punteggio 6]

Posto $f(z) = e^{-i\omega z}/(z^2 + a^2)$ e detti $C_\pm = L_R \cup C_{R\pm}$ i cammini chiusi di integrazione con

$$\begin{aligned} L_R &= \{z(x) = x, \ -R \le x \le R\} \\ C_{R\pm} &= \{z(\theta) = Re^{\pm i\theta}, \ 0 \le \theta \le \pi\} \end{aligned}$$

si osservi che per $R \to \infty$ la funzione $f(z)$ si annulla su C_{R+} se $\omega < 0$ e su C_{R-} se $\omega > 0$. Inoltre $f(z)$ è analitica su e dentro $C_\pm$ ad eccezione del polo semplice in $z = \pm ia$. Per $\omega < 0$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{C_+} f(z)\, dz &= \int_{L_R} f(z)\, dz + \int_{C_{R+}} f(z)\, dz \\ &= 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=ia} f(z) = 2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{z+ia}\right|_{z=ia} = \pi \frac{e^{\omega a}}{a} \end{aligned}$$

mentre per $\omega > 0$

$$\begin{aligned} \int_{C_-} f(z)\, dz &= \int_{L_R} f(z)\, dz + \int_{C_{R-}} f(z)\, dz \\ &= -2\pi i \operatorname*{Res}_{z=-ia} f(z) = -2\pi i \left.\frac{e^{-i\omega z}}{z-ia}\right|_{z=-ia} = \pi \frac{e^{-\omega a}}{a} \end{aligned}$$

Si noti il segno negativo dovuto al verso di percorrenza negativo su C_-. I singoli cammini di integrazione valgono

$$\int_{L_R} f(z)\, dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\, dx$$

$$\int_{C_{R\pm}} f(z)\, dz = \int_0^\pi \frac{e^{-i\omega R(\cos\theta \pm i \sin\theta)}}{R^2 e^{\pm i2\theta} + a^2} \left(\pm iRe^{\pm i\theta}\right) d\theta$$

e quindi

$$\left| \int_{C_{R-\mathrm{sgn}(\omega)}} f(z)\, dz \right| \le \pi\, \frac{R}{R^2 - a^2} \xrightarrow{R\to\infty} 0$$

In conclusione nel limite $R \to \infty$ per ogni valore di ω, compreso il caso banale $\omega = 0$, si ha

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{x^2+a^2}\, dx = \frac{\pi}{a}\, e^{-|\omega| a}$$

Per $a = 4$ e $\omega = 3$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i3x}}{x^2+16}\, dx = \frac{\pi}{4} e^{-12}$$

Esercizio 6 Sia f una funzione intera che soddisfa la seguente condizione: $\exists M > 0$ tale che $\forall z \in \mathbb{C}$ si ha $|f(z)| \leq M + |z|^\alpha$. Per quali valori di α possiamo concludere che f è costante?

[punteggio 5]

Dalla formula integrale di Cauchy e dall'ipotesi su $|f|$ segue che per $\forall z \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} |f'(z)| &= \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-z|=R} \frac{f(w)}{(w-z)^2} dw \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|w-z|=R} \frac{|f(w)|}{|w-z|^2} dw \\ &\leq \frac{M + R^\alpha}{R}. \end{aligned}$$

con R arbitrariamente grande in quanto f è intera. Se $\alpha < 1$ si conclude che $f'(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$ e quindi f costante in $\mathbb{C}$.

Esercizio 7 Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale dell'algebra.

[punteggio 4]

Sia $P_n(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n$ con $z, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ e $a_n \neq 0$ un polinomio di grado $n \geq 1$. Allora esiste almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$.

Si supponga, per assurdo, che $P_n(z) \neq 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Segue che la funzione $f(z) = 1/P_n(z)$ è intera. Tale funzione è anche limitata. Infatti $\lim_{z\to\infty} P_n(z) = \infty$ in quanto non è possibile limitare $|P_n(z)|$ con alcuna costante finita. Segue che $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ cioè $\exists R > 0$ tale che $|f(z)| < 1$ se $|z| > R$. D'altro canto $|f(z)|$ è una funzione continua e dunque limitata nel compatto $|z| \leq R$. Essendo f analitica e limitata in $\mathbb{C}$, per il teorema di Liouville si giunge all'assurdo che essa è costante in $\mathbb{C}$. Deve quindi esistere almeno un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che $P_n(z_0) = 0$.

Modelli e Metodi Matematici della Fisica. Scritto 3/B

Cesi/Presilla – A.A. 2008–09

Nome	
Cognome	

Canale:	Cesi (Astrofisica)	Presilla (Fisica)

Intendo MANTENERE il voto degli esoneri	3	4

problema	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
totale	
voto in trentesimi	

Regolamento:

(1) Tutti gli esercizi, in particolare quelli a carattere teorico, verranno valutati non solo per quanto riguarda la correttezza della risposta, ma anche in base alla chiarezza dell'esposizione e alla calligrafia.

(2) A meno che non venga richiesto esplicitamente il contrario, bisogna scrivere chiaramente i passaggi intermedi, NON solo il risultato finale.

(3) Il risulato deve essere fornito nella forma più semplificata possibile.

(4) Caratteri tipografici appartenenti ad alfabeti di galassie diverse dalla Via Lattea non verranno considerati.

(1) (4 pt). Sia $V = C_2[0,1]$ e $W = \text{span}\{1-2x, x^2\}$. Scrivere la funzione $f(x) := x$ come somma di due termini $f = g + h$ in cui $g \in W$ e $h \in W^\perp$. Verificare che h è ortogonale a W.

Soluzione. Ortogonalizzo i vettori $1-2x, x^2$.

$$
\begin{aligned}
w_1(x) &= 1-2x \\
\|w_1\|^2 &= \int_0^1 (1-2x)^2\,dx = \frac{1}{3} \\
w_2(x) &= x^2 - \frac{\langle x^2, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\,w_1(x) = x^2 - 3\Big[\int_0^1 (x^2-2x^3)\,dx\Big]\,(1-2x) = x^2 - x + \frac{1}{2} \\
\|w_2\|^2 &= \int_0^1 \left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{7}{60}
\end{aligned}
$$

La proiezione su W è data da

$$g = \pi_W(x) = \frac{\langle x, w_1\rangle}{\|w_1\|^2}\,w_1(x) + \frac{\langle x, w_2\rangle}{\|w_2\|^2}\,w_2(x) = \frac{20x^2 - 6x + 3}{14}\,.$$

La componente di f ortogonale a W è data da

$$h := f - g = x - \frac{20x^2 - 6x + 3}{14} = \frac{-20x^2 + 20x - 3}{14}$$

Verifico che h è ortogonale sia ai vettori $v_1 = 1 - 2x$ e $v_2 = x^2$:

$$
\begin{aligned}
14\,\langle h, v_1\rangle &= \langle -20x^2 + 20x - 3, 1-2x\rangle = -20/3 + 10 - 3 + 10 - 40/3 + 3 = 0 \\
14\,\langle h, v_2\rangle &= \langle -20x^2 + 20x - 3, x^2\rangle = -20/5 + 5 - 1 = 0\,.
\end{aligned}
$$

(2) (4 pt). Per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ il seguente integrale è convergente per ogni $f \in C_5(\mathbb{R})$? (Sugg: usare la disuguaglianza di Hölder).

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{1+|x|^\alpha}\,dx$$

Soluzione. Grazie alla disuguaglianza di Hölder si ha, per ogni $p > 1$, $q = p/(p-1)$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{1+|x|^\alpha}\,dx \le \Big[\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{2p}\,dx\Big]^{1/p} \Big[\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{(1+|x|^\alpha)^q}\,dx\Big]^{1/q}.$$

Se $f \in C_5(\mathbb{R})$ il primo integrale al secondo membro è convergente se $p = 5/2$. In questo caso si ha $q = 5/3$. Se $\alpha q > 1$ il secondo integrale è convergente. Quindi se $\alpha > 3/5$ convergono entrambi gli integrale al secondo membro e, di conseguenza, converge anche l'integrale al primo membro.

Ora dimostro che la condizione $\alpha > 3/5$ è anche necessaria. Sia infatti $\alpha \le 3/5$. Poniamo

$$f(x) := \frac{1}{|x|^{1/5}\,[\log(2+|x|)]^{1/4}}\,.$$

Questa funzione appartiene a $C_5(\mathbb{R})$. Infatti

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^5\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|x|\,[\log(2+|x|)]^{5/4}}\,dx < +\infty\,.$$

D'altra parte si ottiene, se $\alpha \le 3/5$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{|f(x)|^2}{1+|x|^\alpha}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{|x|^{2/5}\,(1+|x|^\alpha)\,[\log(2+|x|)]^{1/2}} = \infty\,.$$

La condizione di convergenza è quindi $\alpha > 3/5$.

(3) (5 pt). Sviluppare la funzione $f(x) = \text{sgn}(x)$ in serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$. Scrivere esplicitamente i primi 6 termini non nulli dello sviluppo. Utilizzare il risultato per calcolare la somma delle seguenti serie

(a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots$
(b) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots$

Soluzione. I coefficienti a_k sono nulli perchè la funzione è dispari.

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \text{sgn}(x)\,\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,\sin(kx)\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^k}{k}\,.$$

Quindi

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{se } k = 2n,\ n = 1, 2, \ldots \\ \frac{4}{\pi k} & \text{se } k = 2n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases}$$

Possiamo dunque scrivere lo sviluppo richiesto

$$\begin{aligned} \text{sgn}(x) &= \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{2n+1} \\ &= \frac{4}{\pi}\left[\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \frac{\sin(7x)}{7} + \frac{\sin(9x)}{9} + \frac{\sin(11x)}{11} + \cdots\right] \end{aligned}$$

Poichè la serie converge puntualmente in $x = \pi/2$ si ha

$$1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin[(2n+1)\pi/2]}{2n+1} = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\,.$$

Di conseguenza

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \cdots = \frac{\pi}{4}\,.$$

Analogamente, dalla convergenza nel punto $x = \pi/3$, si ottiene

$$1 = \frac{4}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}\left[1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19}\cdots\right],$$

per cui

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} + \cdots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\,.$$

(4) (7 pt). Sia T l'operatore lineare su ℓ_2 definito come

$$Tx = \left(x_2 - x_1, \frac{x_3 - x_2}{2}, \frac{x_4 - x_3}{3}, \frac{x_5 - x_4}{4}, \ldots\right)$$

(a) Determinare T^*. $T^*x = (?, ?, ?, ?, \ldots)$
(b) Trovare gli autovalori di T. Scrivere esplicitamente i 3 autovalori più grandi in modulo e, per ognuno di essi, un autovettore corrispondente.
(c) Dire se $\lambda = 0$ appartiene allo spettro continuo di T (dimostrare).

Soluzione.

(a) $T^*(x) = \big(-x_1,\ x_1 - x_2/2,\ x_2/2 - x_3/3,\ x_3/3 - x_4/4,\ \ldots\big)$

(b) Risolvendo l'equazione $Tx = \lambda x$ si trova

$$x_{k+1} = (1+\lambda)\,(1+2\lambda)\,\cdots\,(1+k\lambda)\,x_1 = x_1\prod_{j=1}^{k}(1+j\lambda)$$

Se $\lambda = 0$ ottengo $x_{k+1} = x_1$ per ogni k, vale a dire l'unica soluzione è la soluzione costante che NON appartiene a ℓ_2, quindi $\lambda = 0$ non è un autovalore.

Se $\lambda = -1/n$ per un qualche n intero positivo, allora tutte le componenti di n a partire dalla $n+1$–sima si annullano. Il vettore

$$x_k = \begin{cases} \prod_{j=1}^{k-1}(1+j\lambda) & \text{se } k \le n \\ 0 & \text{se } k > n \end{cases}$$

è una soluzione dell'equazione agli autovalori che appartiene a ℓ_2, quindi $\lambda = -1/n$ è autovalore.

Se $\lambda \neq 0$ ed inoltre λ non è della forma $-1/n$ allora si vede che $|x_k| \to \infty$ quando $k \to \infty$, quindi $x \notin \ell_2$ e dunque λ non può essere un autovalore.

Quindi l'insieme degli autovalori di T è $\{-1/n : n = 1, 2, 3, \ldots\}$. I tre autovalori più grandi in modulo, con relativi autovettori sono

$$\begin{array}{ll} \lambda = -1 & x = (1, 0, 0, 0, \ldots) \\ \lambda = -1/2 & x = (1, 1/2, 0, 0, \ldots) \\ \lambda = -1/3 & x = (1, 2/3, 2/9, 0, 0, \ldots) \end{array}$$

(c) Poichè lo spettro è chiuso, lo zero, essendo un punto di accumulazione degli autovalori deve appartenere allo spettro. Ma sappiamo che $\lambda = 0$ non è un autovalore, quindi deve appartenere allo spettro continuo.

Alternativamente si dimostra in maniera diretta che T non è suriettivo. Infatti, risolvendo l'equazione $Tx = y$ si trova

$$x_k := x_1 + \sum_{j=1}^{k-1} j\,y_j\,.$$

Scegliendo $y_j := 1/j$ ho $y \in \ell_2$ ma

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \infty$$

quindi $x \notin \ell_2$. Quindi y non appartiene all'immagine di T e dunque T non è suriettivo.

(5) (6 pt). Calcolare le seguenti distribuzioni, semplificando il più possibile il risultato ($\lfloor u \rfloor$ è la parte intera di u, cioè il più grande numero intero minore od uguale ad u)

$$(a)\;\; D\lfloor e^x \rfloor \qquad\qquad (b)\;\; D^4\big[e^{x^2}\,D^4(|x|)\big]$$

Soluzione.

(a) La funzione $\lfloor e^x \rfloor$ è costante a tratti, con salti unitari che avvengono quando e^x è un intero, vale a dire nei punti $x = \log k$ con $k = 1, 2, \ldots$. Quindi

$$D\lfloor e^x \rfloor = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{\log k}$$

(b)

$$\begin{aligned}
D^4\big[e^{x^2}\,D^4(|x|)\big] &= 2\,D^4[\,e^{x^2}\,\delta_0''\,] \\
&= 2\,D^4\Big(\,[e^{x^2}]_{x=0}\,\delta_0'' - 2\,[D(e^{x^2})]_{x=0}\,\delta_0' + [D^2(e^{x^2})]_{x=0}\,\delta_0\,\Big) \\
&= 2\delta_0^{(6)} + 4\delta_0^{(4)}
\end{aligned}$$

(6) (3 pt). Sia $f \in L_1(\mathbb{R})$ e sia $g := \mathcal{F}[f]$ la trasformata di Fourier di f. Assumendo che f sia *reale* e *dispari* $(f(-x) = -f(x))$, cosa posso affermare su g? (Dimostrare).

Soluzione. La funzione $g := \mathcal{F}[f]$ è immaginaria pura e dispari. Infatti:

$$\begin{aligned}
\overline{g(\lambda)} &= \overline{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(x)}e^{+i\lambda x}\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{+i\lambda x}\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{+i\lambda x}\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = -g(\lambda)\,.
\end{aligned}$$

Analogamente

$$g(-\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{+i\lambda x}\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(-x)e^{+i\lambda x}\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-i\lambda x}\,dx = -g(\lambda)\,.$$

(7) (4 pt). Sia W un sottospazio dello spazio di Hilbert V. Dimostrare che $(W^{\perp})^{\perp} = \overline{W}$.

Soluzione. Vedi, ad esempio, sui “Rudimenti”.