MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2008/2009 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 2 Luglio 2009

Cognome	
Nome	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Calcolare le seguenti distribuzioni semplificando il più possibile il risultato

(a) $x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)'$ (b) $(x(\log|x|)')'$ (c) $(\cos x \operatorname{sgn} x)'''$

[punteggio 6]

(a) Usando $\theta' = \delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} x(\sin x\ \delta_0 - \cos x\ \theta)' &= x(-\cos x\ \theta)' \\ &= x(\sin x\ \theta - \cos x\ \theta') \\ &= x\sin x\ \theta - x\cos x\ \delta_0 \\ &= x\sin x\ \theta \end{aligned}$$

(b) Usando $(\log|x|)' = P(1/x)$, si ha

$$(x(\log|x|)')' = (xP(1/x))' = (1)' = 0$$

(c) Usando $(\operatorname{sgn} x)' = 2\delta_0$ e $h\delta_0 = h(0)\delta_0$ con $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, si ha

$$\begin{aligned} (\cos x \operatorname{sgn} x)''' &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + \cos x\ 2\delta_0)'' \\ &= (-\sin x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0)'' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x - \sin x\ 2\delta_0 + 2\delta_0')' \\ &= (-\cos x \operatorname{sgn} x + 2\delta_0')' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - \cos x\ 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin x \operatorname{sgn} x - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \\ &= \sin|x| - 2\delta_0 + 2\delta_0'' \end{aligned}$$

<u>Esercizio 2</u> Sia T l'operatore lineare su $V = (C_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ definito da $(Tf)(x) = \sin x\ f(x)$. Si dimostri che $\sum_{k=1}^{\infty} T^k/2^k$ è un operatore lineare continuo su V.

[punteggio 5]

Si osservi che V è uno spazio vettoriale normato completo (spazio di Banach) quindi anche $(\mathcal{L}(V), \|\cdot\|)$, l'insieme degli operatori lineari continui su V, è uno spazio vettoriale completo (vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 145). Inoltre $\|T\| \leq 1$ in quanto

$$\|Tf\|_u = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\sin x\ f(x)| \leq \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| = \|f\|_u \qquad \forall f \in V$$

Pertanto $T \in \mathcal{L}(V)$. Segue che gli operatori definiti come

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} T^k/2^k \qquad n = 1, 2, \ldots$$

sono una successione di operatori lineari continui su V. Dal fatto che

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|T\|^k /2^k \leq \sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k < \infty$$

segue immediatamente che $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ è una successione di Cauchy (vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 146) e quindi convergente in $\mathcal{L}(V, \|\cdot\|)$.

Esercizio 3 Sia T l'operatore lineare su $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots)$$

Determinare la norma di T e l'operatore aggiunto T^*. Dalla risposta alla precedente domanda, senza fare calcoli, che cosa si può dedurre sullo spettro di T?

[punteggio 6]

Per ogni $x \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\|Tx\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(Tx)_k|^2 &= |x_2|^2 + \sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1} + x_{k+1}|^2 \\
&\leq |x_2|^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k-1}|^2 + 2\sum_{k=2}^{\infty} |x_{k+1}|^2 \\
&= 2\,\|x\|_2^2 + 2\,\|x\|_2^2 - |x_2|^2 - 2\,|x_1|^2 \leq 4\,\|x\|_2^2
\end{aligned}$$

e quindi

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_2}{\|x\|_2} \leq 2$$

Si consideri ora la successione $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ con $x^{(n)} \in \ell_2(\mathbb{C})$ definita da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} 1 & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

L'azione dell'operatore T su $x^{(n)}$ fornisce

$$(Tx^{(n)})_k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ 2 & 2 \leq k \leq n-1 \\ 1 & k = n, n+1 \\ 0 & k > n+1 \end{cases}$$

e risulta

$$\frac{\left\|Tx^{(n)}\right\|_2}{\left\|x^{(n)}\right\|_2} = \frac{\sqrt{4(n-2)+3}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{1 - 5/n} \xrightarrow{n \to \infty} 2$$

Deve perciò essere $\|T\| \geq 2$. In conclusione, $\|T\| = 2$.
Dalla definizione di aggiunto, $\forall x, y \in \ell_2(\mathbb{C})$ si ha

$$\begin{aligned}
\langle T^* x, y \rangle &= \langle x, Ty \rangle \\
&= x_1\overline{y_2} + x_2(\overline{y_1} + \overline{y_3}) + x_3(\overline{y_2} + \overline{y_4}) + x_4(\overline{y_3} + \overline{y_5}) + \dots \\
&= x_2\overline{y_1} + (x_1 + x_3)\overline{y_2} + (x_2 + x_4)\overline{y_3} + (x_3 + x_5)\overline{y_4} + \dots
\end{aligned}$$

Dalla arbitrarietà di y, segue

$$T^*(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots) = (x_2, x_1 + x_3, x_2 + x_4, x_3 + x_5, \dots) \qquad \forall x \in \ell_2(\mathbb{C})$$

cioè $T^* = T$.
Poiché T è autoaggiunto $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$. Inoltre $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, \|T\|)$. Pertanto $\sigma(T) \subset \overline{B}(0, 2) \cap \mathbb{R} = [-2, 2]$.

<u>Esercizio 4</u> Detti $(V, \|\cdot\|_V)$ e $(Z, \|\cdot\|_Z)$ due spazi vettoriali normati si consideri un operatore $T \in \mathcal{L}(V, Z)$. Definire l'immagine di T e dire se essa è un sottospazio chiuso di Z. In caso positivo dimostrarlo, in caso negativo fornire un controesempio.

[punteggio 5]

$\operatorname{Ran} T = \{z \in Z : \ z = Tv \text{ per qualche } v \in V\ \}$ non è un sottospazio chiuso di Z, vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 140.

<u>Esercizio 5</u> Sviluppare in serie trigonometrica di Fourier in $[-\pi,\pi]$ la funzione $f(x)=\theta(|x|-\pi/2)\theta(\pi-|x|)\,\mathrm{sgn}(x)$ e studiare la convergenza puntuale della serie così ottenuta.

[punteggio 5]

Poiché $\theta(x)=1$ per $x\geq 1$ e $\theta(x)=0$ per $x<0$, si ha

$$f(x)=\begin{cases} -1 & -\pi\leq x\leq -\pi/2 \\ 0 & -\pi/2<x<\pi/2 \\ 1 & \pi/2\leq x\leq \pi \end{cases}$$

La funzione $f(x)$ è dispari e pertanto

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)dx=0 \qquad k=0,1,2,\ldots$$

mentre

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}\sin(kx)dx \\ &= \frac{2}{k\pi}(\cos(k\pi/2)-\cos(k\pi)) \qquad k=1,2,\ldots \end{aligned}$$

In conclusione

$$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2(\cos(k\pi/2)-\cos(k\pi))}{k\pi}\sin(kx)$$

Il prolungamento periodico da $(-\pi,\pi]$ a $\mathbb{R}$ di $f(x)$ è una funzione derivabile a tratti, con punti di discontinuità in $\pm\pi$ e $\pm\pi/2$. Pertanto la serie trigonometrica sopra scritta converge puntualmente a $f(x)$ per $x\in(-\pi,-\pi/2)\cup(-\pi/2,\pi/2)\cup(\pi/2,\pi)$ mentre per $x=\pm\pi$ e $x=\pm\pi/2$ converge rispettivamente a 0 e $\pm 1/2$.

<u>Esercizio 6</u> Sia T l'operatore lineare in $(C[-\pi,\pi];\mathbb{C},\|\cdot\|_u)$ definito da

$$(Tf)(x) = g(x)f(x) \qquad g(x) = \begin{cases} -1 & -\pi \le x < -\pi/2 \\ \sin x & -\pi/2 \le x \le \pi/2 \\ 1 & \pi/2 < x \le \pi \end{cases}$$

Determinare lo spettro puntuale e continuo di T.

[punteggio 6]

Si studi l'iniettività dell'operatore $zI - T$, $z \in \mathbb{C}$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ker}(zI - T)$ contiene il solo vettore nullo ovvero se $(zI - T)f = 0$ è soddisfatta per $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ solo da $f = 0$. L'equazione per gli autovalori $(zI - T)f = 0$ implica

$$(z - g(x))f(x) = 0 \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- Se $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, il fattore $z - g(x)$ è sempre non nullo per $x \in [-\pi,\pi]$ e quindi $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z \in (-1,1)$, il fattore $z - g(x)$ si annulla solo in $x_z = \arcsin z$. Pertanto $f(x) = 0$ $\forall x \in [-\pi, x_z) \cup (x_z, \pi]$ ma dovendo f essere continua, si conclude ancora $f = 0$, cioè $zI - T$ è iniettivo.
- Se $z = \pm 1$, l'equazione $(zI - T)f = 0$ è soddisfatta per tutte quelle funzioni f continue in $[-\pi,\pi]$ e non nulle solo in $(\pi/2,\pi]$ (se $z = 1$) o solo in $[-\pi,-\pi/2)$ (se $z = -1$). Dunque T ha autovalori $z = \pm 1$ e a ciascuno di tali autovalori corrispondono infinite autofunzioni.

Si studi ora la suriettività di $zI - T$. Si vuole determinare se $\mathrm{Ran}(zI - T)$ coincide con $(C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ ovvero se $\forall h \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ esiste $f \in (C[-\pi,\pi];\mathbb{C})$ tale che $(zI - T)f = h$. Affinchè ciò accada deve essere

$$f(x) = \frac{h(x)}{z - g(x)} \qquad \forall x \in [-\pi,\pi]$$

- Se $z \in (-1,1)$, per ogni h tale che $h(x_z) \neq 0$ la f diverge in x_z e quindi risulta non continua. In tal caso $zI - T$ è non suriettivo ma, per quanto visto in precedenza, iniettivo, cioè $z \in \sigma_c(T)$.
- Se $z \in \mathbb{C} \setminus [-1,1]$, la funzione f, in quanto rapporto di funzioni continue con la funzione a denominatore mai nulla, è continua in $[-\pi,\pi]$. Pertanto $zI - T$ è suriettivo e anche iniettivo e quindi invertibile.

Riepilogando, $\sigma_p(T) = \{-1,1\}$, $\sigma_c(T) = (-1,1)$, $\rho(T) = \mathbb{C} \setminus [-1,1]$.