# MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 3 febbraio 2015

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| | |
|---|---|
| iscritto al secondo anno | |
| iscritto al terzo anno | |
| fuoricorso o con più di 155 CFU | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

Esercizio 1 Calcolare tutte le soluzioni della seguente equazione e graficarle nel piano complesso

$$\cos\left(3z^2\right) = 0$$

[punteggio 5]

Posto $w = x + iy$, le soluzioni dell'equazione

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} = 0$$

sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \cos x \cosh y = 0 \\ \sin x \sinh y = 0 \end{cases}$$

ovvero $y = 0$ e $x = \pm(2k + 1)\pi/2$, con $k = 0, 1, 2, \ldots$. Si ha quindi che $\cos\left(3z^2\right) = 0$ quando

$$3z^2 = \pm\frac{\pi}{2}(2k + 1) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

cioè quando

$$z = \sqrt{\pm\frac{\pi}{6}(2k + 1)} = \begin{cases} \pm\sqrt{(2k + 1)\pi/6} \\ \pm i\sqrt{(2k + 1)\pi/6} \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

<u>Esercizio 2</u> Si consideri la funzione $f(z) = (3z^2 - \overline{z}^2)\overline{z}/2$. Determinare, motivando la risposta, i domini di continuità, derivabilità e analiticità di $f$.

[punteggio 5]

---

In quanto composizione di funzioni continue in tutto $\mathbb{C}$, $f$ è continua in tutto $\mathbb{C}$. Per studiare la derivabilità, si osservi che, posto $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$f(x + iy) = x^3 + 3xy^2 + i(y^3 + 3x^2 y),$$

pertanto $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x^3 + 3xy^2$ e $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = y^3 + 3x^2 y$. Le funzioni $u$ e $v$ sono derivabili in tutto $\mathbb{R}^2$ con derivate

$$\begin{aligned} &u_x(x, y) = 3x^2 + 3y^2, \qquad u_y(x, y) = 6xy, \\ &v_x(x, y) = 6xy, \qquad v_y(x, y) = 3y^2 + 3x^2, \end{aligned}$$

continue in tutto $\mathbb{R}^2$. Le equazioni di Cauchy-Riemann, $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, sono quindi

$$\begin{aligned} &3x^2 + 3y^2 = 3x^2 + 3y^2, \\ &6xy = -6xy. \end{aligned}$$

La prima equazione è sempre soddisfatta, la seconda solo se $x = 0$ oppure $y = 0$. Segue che $f$ è derivabile solo nei punti degli assi coordinati. In nessuno di tali punti però la $f$ è analitica. Infatti $\forall \varepsilon > 0$ la boccia $B(z, \varepsilon)$, con $z$ reale o immaginario puro, contiene punti $w$ tali che $\operatorname{Re} w \neq 0$ e $\operatorname{Im} w \neq 0$ in cui la $f$ è non derivabile.

Esercizio 3 Assumendo per le funzioni polidrome il ramo principale, calcolare l'integrale

$$\int_\gamma z \log z \mathrm{d}z,$$

dove $\gamma$ è un cammino regolare a tratti chiuso semplice percorso in verso antiorario che interseca il semiasse reale negativo a distanza $R$ dall'origine.

[punteggio 6]

La funzione integranda

$$z \log z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} (\ln r + \mathrm{i}\theta), \qquad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r > 0, \quad -\pi < \theta < \pi,$$

è continua su tutto $\gamma$ ad eccezione del punto $z = -R$. Si consideri il cammino di integrazione $\gamma : [-\theta, \theta] \mapsto \mathbb{C}$ con $\gamma(\theta) = \gamma(-\theta) = -R$. Per $z \in \{\gamma_\varepsilon\}$ dove $\gamma_\varepsilon(\theta) = \gamma(\theta)$, con $-(\pi - \varepsilon) \leq \theta \leq (\pi - \varepsilon)$ e $\varepsilon > 0$ arbitrario, la funzione $z \log z$ ammette la primitiva $z^2(-1 + 2 \log z)/4$. Pertanto

$$\begin{aligned}
\int_\gamma z \log z \mathrm{d}z &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma_\varepsilon} z \log z \mathrm{d}z \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{z^2}{4}(-1 + 2 \log z)\Big|_{\gamma(-(\pi-\varepsilon))}^{\gamma(\pi-\varepsilon)} \\
&= \frac{R^2}{4}(-1 + 2(\ln R + \mathrm{i}\pi)) - \frac{R^2}{4}(-1 + 2(\ln R - \mathrm{i}\pi)) \\
&= \mathrm{i}\pi R^2.
\end{aligned}$$

<u>Esercizio 4</u> Sia $(S, d)$ uno spazio metrico e $A \subset S$. Dimostrare che $A$ è chiuso se e solo se $A = \overline{A}$.

[punteggio 5]

---

Si ricordi innanzitutto la definizione di chiusura di $A$

$$\overline{A} = \bigcap_{F \text{chiuso},\ F \supset A} F$$

Si supponga $A$ chiuso. Per la definizione di $\overline{A}$ si ha evidentemente che $A \subset \overline{A}$. D'altro canto poiché $A \supset A$, $A$ stesso è uno degli insiemi chiusi $F$ la cui intersezione definisce $\overline{A}$ e pertanto $\overline{A} \subset A$. Si deve allora concludere che $A = \overline{A}$.
Si supponga ora $A = \overline{A}$. Poiché l'intersezione di una infinità numerabile di insiemi chiusi è un insieme chiuso, $A$ è chiuso.

Esercizio 5 Determinare fino all'ordine $z^6$ compreso lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $z_0 = 0$ del ramo principale della funzione

$$f(z) = \frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}}.$$

[punteggio 6]

Si osservi innanzitutto che $f$ è analitica in un intorno di $z_0 = 0$, precisamente nella palla $B(0, \pi/2)$ come visto nell'esercizio precedente, e in tale intorno risulta

$$f(z) = -2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sqrt{\cos z}.$$

Pertanto è sufficiente determinare lo sviluppo in serie di Taylor con centro in $z_0 = 0$ del ramo principale di $\sqrt{\cos z}$. Ricordando gli sviluppi notevoli

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \qquad |z| < \infty,$$
$$\sqrt{1+z} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k, \qquad |z| < 1,$$

si ha

$$\begin{aligned}
\sqrt{\cos z} &= \sqrt{1 + (\cos z - 1)} \\
&= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^2 \\
&\quad + \frac{1}{16}\left(-\frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots\right)^3 + \dots \\
&= 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2!}z^2 + \left(\frac{1}{2}\frac{1}{4!} - \frac{1}{8}\frac{1}{(2!)^2}\right) z^4 + \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{6!} + \frac{1}{8}\frac{2}{2!4!} - \frac{1}{16}\frac{1}{(2!)^3}\right) z^6 + O(z^8) \\
&= 1 - \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{96}z^4 - \frac{19}{5760}z^6 + O(z^8).
\end{aligned}$$

Tale sviluppo è valido all'interno del massimo disco centrato in $z_0 = 0$ e tale che per ogni $z$ al suo interno risulti $\mathrm{Re}(\cos z - 1) > -1$. Questa condizione equivale a $|z| < \pi/2$ e possiamo concludere

$$\frac{\sin z}{\sqrt{\cos z}} = z + \frac{1}{12}z^3 + \frac{19}{480}z^5 + O(z^7), \qquad |z| < \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 6 Si calcoli l'integrale reale

$$\int_0^\infty \frac{x^b}{1+x^3}\mathrm{d}x, \qquad b\in\mathbb{R},$$

specificando per quali valori di $b$ l'integrale risulta convergente.

[punteggio 6]

---

Si ponga $f(z)=\mathrm{e}^{b\log z}/(1+z^3)$, assumendo per il logaritmo il ramo

$$\log z = \ln r + \mathrm{i}\theta, \qquad z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \quad r>0, \quad 0<\theta<2\pi.$$

Si osservi che $f$ ha poli semplici in $z=-1$ e $z=\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\pi/3}$ e una linea di diramazione coincidente con il semiasse reale positivo. Si integri $f$ lungo il cammino chiuso $\gamma=\lambda_1+\gamma_R+\lambda_2+\gamma_r$, dove $\lambda_1(x)=x+\mathrm{i}0$, $r\le x\le R$, $\gamma_R(\theta)=R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0\le\theta\le 2\pi/3$, $\lambda_2(x)=x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}$, $R\ge x\ge r$, e $\gamma_r(\theta)=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $2\pi/3\ge\theta\ge 0$. Per $R>1$ e $r<1$ si ha

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z &= \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z+\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\\ &= 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{Res}_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}\frac{\mathrm{e}^{b\log z}}{1+z^3}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\left.\frac{\mathrm{e}^{b\log z}}{3z^2}\right|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/3}}\\ &= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2-b)\pi/3}.\end{aligned}$$

Gli integrali sui cammini che compongono $\gamma$ valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z=\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{b(\ln x+\mathrm{i}0)}}{(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}0})^3+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}0}\mathrm{d}x=\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{b\ln x}}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z=\int_R^r\frac{\mathrm{e}^{b(\ln x+\mathrm{i}2\pi/3)}}{(x\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3})^3+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi/3}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+b)2\pi/3}\int_r^R\frac{\mathrm{e}^{b\ln x}}{x^3+1}\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right|\le\frac{\mathrm{e}^{b\ln R}}{R^3-1}\,\frac{3}{2}\pi R=\frac{3\pi R^{1+b}}{2(R^3-1)}\xrightarrow{R\to\infty}0, \qquad \text{se } b<2,$$

$$\left|\int_{\gamma_r} f(z)\mathrm{d}z\right|\le\frac{\mathrm{e}^{b\ln r}}{1-r^3}\,\frac{3}{2}\pi r=\frac{3\pi r^{1+b}}{2(1-r^3)}\xrightarrow{r\to 0}0, \qquad \text{se } b>-1.$$

Prendendo i limiti $R\to\infty$ e $r\to 0$, per $-1<b<2$ si conclude

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{x^b}{x^3+1}\mathrm{d}x &= 2\pi\mathrm{i}\,\frac{1}{3}\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2-b)\pi/3}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1+b)2\pi/3}}\\ &=\frac{\pi}{3}\frac{2\mathrm{i}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2-b)\pi/3}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2-b)\pi/3}}\\ &=\frac{\pi}{3}\,\frac{1}{\sin((2-b)\pi/3)}.\end{aligned}$$

MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2013/2014 – Prof. C. Presilla

Prova B4 – 3 febbraio 2015

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |

| | |
|---|---|
| iscritto al secondo anno | |
| iscritto al terzo anno | |
| fuoricorso o con più di 155 CFU | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

<u>Esercizio 1</u> Determinare se lo spazio vettoriale $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$, dove $\|x\| = \sup_k |x_k|/k$, è completo. In caso positivo dimostrarlo, in caso negativo fornire un esempio.

[punteggio 5]

---

Lo spazio vettoriale in questione non è completo. Si consideri la successione di vettori $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ definiti da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Poiché $\|x^{(n)}\| = \sup_k \left|x_k^{(n)}\right|/k = \sup_{1\leq k\leq n} 1/\sqrt{k} = 1$, si ha che $x^{(n)} \in (\ell_\infty, \|\cdot\|)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione $(x^{(n)})_{n=1}^\infty$ è di Cauchy. Infatti, posto $m > n$, si ha

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \sup_k \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{k} = \sup_{n+1\leq k\leq m} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

La successione tuttavia non è convergente nello spazio vettoriale considerato. Infatti, si ha $\lim_{n\to\infty} \|x^{(n)} - x\| = 0$ con $x = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots) \notin (\ell_\infty, \|\cdot\|)$.

Esercizio 2 Dimostrare che non esiste un prodotto scalare in $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ tale che $\|f\|_u^2 = \langle f, f\rangle \ \forall f \in C_c(\mathbb{R})$.

[punteggio 5]

---

Si considerino le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x-2| & |x-2| \le 1 \\ 0 & |x-2| > 1 \end{cases}$$

Risulta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ con $\|f\|_u = 1$, $\|g\|_u = 1$, $\|f+g\|_u = 1$ e $\|f-g\|_u = 1$. La regola del parallelogramma

$$\|f+g\|_u^2 + \|f-g\|_u^2 = 2(\|f\|_u^2 + \|g\|_u^2)$$

è quindi violata.
Come secondo esempio, si considerino le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Risulta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ con $\|f\|_u = \|g\|_u = 1$ e $\|f+g\|_u = \|f-g\|_u = 2$. La regola del parallelogramma si legge ora $2^2 + 2^2 = 2(1^2 + 1^2)$ ed è quindi violata.

Esercizio 3 Sia $A \in \mathcal{L}(V)$ un operatore lineare limitato nello spazio Euclideo $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Dimostrare che $\|A^*\| = \|A\|$.

[punteggio 5]

---

Dimostriamo che vale la disuaglianza $\|A\| \leq \|A^*\|$. Si osservi che $\forall v \in V$, con $v \neq 0$, si ha

$$\|Av\|^2 = \langle Av, Av \rangle = |\langle A^*Av, v \rangle| \leq \|A^*Av\| \, \|v\| \leq \|A^*\| \|Av\| \|v\|,$$

dove si è utilizzata la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \, \|v\|$ e la definizione di norma di $A^*$. Quindi

$$\|Av\| \leq \|A^*\| \|v\|$$

da cui segue

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \leq \|A^*\|.$$

Poiché $(A^*)^* = A$, vale anche la disuguaglianza opposta

$$\|A^*\| \leq \|A\|,$$

da cui l'asserto.

Esercizio 4 Determinare la derivata della distribuzione regolare $\varphi_g$ associata alla funzione

$$g(x) = \begin{cases} \cos(x)e^{|x|} & -3 \le x \le 2 \\ 0 & x < -3,\ x > 2 \end{cases} .$$

[punteggio 6]

---

La funzione $g$ è continua a tratti (questo assicura che $\varphi_g$ è una distribuzione) con discontinuità nei punti $u_1 = -3$ e $u_2 = 2$ di valore

$$\begin{aligned} h_1 &= g(u_1^+) - g(u_1^-) = \cos(-3)e^{|-3|} = \cos(3)e^3 \\ h_2 &= g(u_2^+) - g(u_2^-) = -\cos(2)e^{|2|} = -\cos(2)e^2 \end{aligned}$$

La derivata di $g$ esiste continua a tratti (questo assicura che $\varphi_{g'}$ è una distribuzione) e vale

$$\begin{aligned} g'(x) &= \begin{cases} 0 & x < -3 \\ -\sin(x)e^{-x} - \cos(x)e^{-x} & -3 < x < 0 \\ -\sin(x)e^{x} + \cos(x)e^{x} & 0 < x < 2 \\ 0 & 2 < x \end{cases} \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x), \end{aligned}$$

dove $\chi_{[a,b]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a,b]$, cioè $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a,b]$ e $\chi_{[a,b]}(x) = 0$ altrove. Di conseguenza

$$\varphi_g' = \varphi_{g'} + e^3\cos(3)\delta_{-3} - e^2\cos(2)\delta_2.$$

Alternativamente, osservando che $\chi_{[-3,2]}(x) = H(x+3) - H(x-2)$ essendo $H$ la funzione di Heavyside,

$$\begin{aligned} D[\cos(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x)] &= D[\cos(x)]e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)D[e^{|x|}]\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}D[\chi_{[-3,2]}(x)] \\ &= -\sin(x)e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + \cos(x)e^{|x|}(\delta_{-3} - \delta_2) \\ &= (-\sin(x) + \cos(x)\operatorname{sgn}(x))e^{|x|}\chi_{[-3,2]}(x) \\ &\quad + e^3\cos(3)\delta_{-3} - e^2\cos(2)\delta_2. \end{aligned}$$

Esercizio 5 Determinare lo spettro di $U$ operatore in $(C_2([0,2\pi];\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ definito da

$$(Uf)(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2} f(x).$$

[punteggio 6]

---

Per determinare lo spettro di $U$, iniziamo a studiare

$$\mathrm{Ker}(zI - U) = \{f \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C}) : \ (zI - U)f = 0\}.$$

L'equazione agli autovalori $(zI - U)f = 0$ fornisce

$$(z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}) f(x) = 0, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Se $|z| \neq 1$, l'equazione ammette la sola soluzione banale $f = 0$. Se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, la soluzione è $f(x) = 0$ per $x^2 \neq \theta$. Per la continuità di $f$ si deve ammettere che l'unica soluzione possibile è ancora $f = 0$. In conclusione $\mathrm{Ker}(zI - U) = \{0\}$ $\forall z \in \mathbb{C}$, cioè $zI - U$ è sempre iniettivo e $\sigma_p(U) = \emptyset$.
Per determinare lo spettro continuo, studiamo

$$\mathrm{Ran}(zI - U) = \{g \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C}) : \ g = (zI - U)f, \ f \in C_2([0,2\pi];\mathbb{C})\}.$$

Deve risultare

$$f(x) = \frac{g(x)}{z - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x^2}}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Se $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in [0, 2\pi]$, risulta $f$ non continua in $x = \sqrt{\theta}$ se $g$ non si annulla in questo punto. Dunque $zI - U$ è iniettivo non suriettivo. Se $|z| \neq 1$, $\mathrm{Ran}(zI - U) = C_2([0,2\pi];\mathbb{C})$ e quindi $zI - U$ è invertibile. Concludiamo che $\sigma_c(U) = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$.

Esercizio 6 Esprimere la trasformata di Fourier di

$$f_k(x) = \begin{cases} x^k & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}, \qquad a > 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

in termini della trasformata di Fourier di $f_0(x)$. Determinare esplicitamente la trasformata di $f_3(x)$.

[punteggio 6]

---

Sia $g(\lambda)$ la trasformata di Fourier di

$$f_0(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq a \\ 0 & |x| > a \end{cases}.$$

Iniziamo con l'osservare che la funzione $f_0(x)$ è continua a tratti. Pertanto, senza calcolare $g(\lambda)$, possiamo concludere che $g(\lambda) \in C_0(\mathbb{R};\mathbb{C})$. D'altro canto, la funzione $x^k f_0(x) = f_k(x)$, continua in $(-a, a)$ e a supporto compatto $[-a, a]$, appartiene a $L_1(\mathbb{R};\mathbb{C})$ per ogni intero $k$. Tanto basta per concludere che $g(\lambda) \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Inoltre vale la relazione

$$\mathcal{F}[(-\mathrm{i}x)^k f_0(x)](\lambda) = g^{(k)}(\lambda).$$

La trasformata di Fourier di $f_k(x) = x^k f_0(x)$ è quindi esprimibile in termini della derivata di ordine $k$ di $g(\lambda)$

$$\mathcal{F}[f_k(x)](\lambda) = \mathcal{F}[x^k f_0(x)](\lambda) = (-\mathrm{i})^{-k} g^{(k)}(\lambda).$$

Poiché

$$g(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f_0(x) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x} \mathrm{d}x = \left. \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda x}}{-\mathrm{i}\lambda} \right|_{-a}^{a} = \frac{2\sin(\lambda a)}{\lambda},$$

per $k = 3$ risulta

$$g'(\lambda) = \frac{2a}{\lambda} \cos(\lambda a) - \frac{2}{\lambda^2} \sin(\lambda a),$$

$$g''(\lambda) = -\frac{2a^2}{\lambda} \sin(\lambda a) - \frac{4a}{\lambda^2} \cos(\lambda a) + \frac{4}{\lambda^3} \sin(\lambda a),$$

$$g'''(\lambda) = -\frac{2a^3}{\lambda} \cos(\lambda a) + \frac{6a^2}{\lambda^2} \sin(\lambda a) + \frac{12a}{\lambda^3} \cos(\lambda a) - \frac{12}{\lambda^4} \sin(\lambda a),$$

e quindi

$$\mathcal{F}[f_3(x)](\lambda) = -\mathrm{i} g'''(\lambda).$$