MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2011/2012 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 3 Maggio 2012

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione

$$(\sin z)^2 = -4.$$

Si disegni la posizione delle soluzioni nel piano complesso e si determinino i punti limite in $\mathbb{C}_\infty$.

[punteggio 5]

L'equazione assegnata

$$\left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -4$$

è equivalente a

$$e^{iz} - e^{-iz} = \sqrt{-4(2i)^2} = \pm 4,$$

ovvero

$$e^{2iz} \pm 4e^{iz} - 1 = 0,$$

le cui soluzioni sono $e^{iz} = \pm 2 \pm \sqrt{5}$. Di queste quattro soluzioni, tutte reali, due sono positive

$$e^{iz} = \sqrt{5} \pm 2 = (\sqrt{5} \pm 2)e^{i0},$$

mentre le altre due sono negative

$$e^{iz} = -\sqrt{5} \mp 2 = (\sqrt{5} \pm 2)e^{i\pi}.$$

Prendendo il logaritmo, nei due casi si ha rispettivamente

$$\begin{aligned} iz &= \log(\sqrt{5} \pm 2) = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i2\pi k, \qquad k \in \mathbb{Z}, \\ iz &= \log(-\sqrt{5} \mp 2) = \ln(\sqrt{5} \pm 2) + i(\pi + 2\pi k), \qquad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Si conclude che le soluzioni dell'equazione assegnata sono

$$z_k = \pi k - i \ln(\sqrt{5} \pm 2), \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Si tratta di punti isolati che giacciono sulle rette $y = -\ln(\sqrt{5} + 2) < 0$ e $y = -\ln(\sqrt{5} - 2) > 0$ parallele all'asse reale. Il loro unico punto limite è il punto all'infinito.

Esercizio 2 Dimostrare che la funzione $f(z) = z^{-2}$ non è uniformemente continua nel dominio $D = \{z \in \mathbb{C} :\ 0 < |z| \leq 3\}$. Proporre una deformazione di D in modo tale che nel dominio deformato f risulti uniformemente continua.

[punteggio 5]

In quanto funzione razionale con denominatore mai nullo, f è continua in D. Per dimostrare che f non è uniformemente continua in D facciamo vedere che, scelto $\varepsilon > 0$, esistono coppie di punti $z, w \in D$ distanti tra loro arbitrariamente poco e le cui immagini $f(z), f(w)$ hanno distanza maggiore o uguale a ε. Si considerino due punti del tipo $z = x$ e $w = x + \delta$ con $x \in (0, 3]$ e $\delta > 0$. Determiniamo $\delta(x, \varepsilon)$ in modo tale che

$$|f(z) - f(w)| = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+\delta)^2} = \frac{\delta^2 + 2x\delta}{x^2(\delta^2 + 2x\delta + x^2)} = \varepsilon.$$

Questa condizione è equivalente a

$$(1 - \varepsilon x^2)\delta^2 + 2x(1 - \varepsilon x^2)\delta - \varepsilon x^4 = 0,$$

la cui soluzione positiva è (ammettiamo che ε sia sufficientemente piccolo per cui $1 - \varepsilon x^2 > 0\ \forall x \in (0, 3]$, ovvero $\varepsilon < 1/9$)

$$\delta(x, \varepsilon) = x\left(\sqrt{1 + \frac{\varepsilon x^2}{1 - \varepsilon x^2}} - 1\right).$$

Poiché

$$\inf_{x \in (0,3]} \delta(x, \varepsilon) = 0,$$

segue che $\forall \delta > 0\ \exists z, w \in D$ con $|z - w| < \delta$ e $|f(z) - f(w)| \geq \varepsilon$.
Si consideri il dominio $D_r = \{z \in \mathbb{C} :\ r \leq |z| \leq 3\}$ con $0 < r < 3$. La funzione f è continua in D_r e D_r, in quanto sottoinsieme chiuso e limitato di $\mathbb{C}$, è un sottoinsieme compatto di $\mathbb{C}$. Segue che f è uniformemente continua in D_r.

Esercizio 3 Determinare il dominio di analiticità delle seguenti funzioni e calcolarne la derivata prima, dimostrando quanto si afferma:

$$\text{a)}\quad f(z) = r^{-4}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}4\theta}, \qquad \text{b)}\quad f(z) = (\cos(\ln r) + \mathrm{i}\sin(\ln r))\,\mathrm{e}^{-\theta},$$

dove $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ con $\theta \in (-\pi, \pi]$ e $r \geq 0$.

[punteggio 6]

---

a) Posto $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, si ha

$$u(r,\theta) = r^{-4}\cos(4\theta), \qquad v(r,\theta) = -r^{-4}\sin(4\theta).$$

Per $r > 0$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta) &= -4r^{-5}\cos(4\theta), \qquad & u_\theta(r,\theta) &= -4r^{-4}\sin(4\theta),\\ v_r(r,\theta) &= 4r^{-5}\sin(4\theta), \qquad & v_\theta(r,\theta) &= -4r^{-4}\cos(4\theta), \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Pertanto $f(z)$ è derivabile per $z \neq 0$ e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r,\theta) + \mathrm{i}v_r(r,\theta))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ &= -4r^{-5}\left(\cos(-4\theta) + \mathrm{i}\sin(-4\theta)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ &= -4z^{-5}, \end{aligned}$$

in accordo con il fatto che $f(z) = z^{-4}$. Il dominio di analiticità di f è $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

b) Posto $f(z) = u(r,\theta) + \mathrm{i}v(r,\theta)$, si ha

$$u(r,\theta) = \cos(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta}, \qquad v(r,\theta) = \sin(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta}.$$

Si osservi che per ogni $r > 0$ si ha $u(r,\pi) \neq \lim_{\theta\to-\pi} u(r,\theta)$ e $v(r,\pi) \neq \lim_{\theta\to-\pi} v(r,\theta)$, pertanto $f(z)$ risulta non continua lungo il semiasse reale negativo. Per $r > 0$ e $-\pi < \theta < \pi$ le funzioni u e v sono derivabili con derivate prime continue

$$\begin{aligned} u_r(r,\theta) &= -\frac{1}{r}\sin(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta}, \qquad & u_\theta(r,\theta) &= -\cos(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta},\\ v_r(r,\theta) &= \frac{1}{r}\cos(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta}, \qquad & v_\theta(r,\theta) &= -\sin(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta}, \end{aligned}$$

e soddisfano le condizioni di Cauchy-Riemann $ru_r = v_\theta$, $u_\theta = -rv_r$. Nello stesso dominio $f(z)$ risulta quindi derivabile e la sua derivata vale

$$\begin{aligned} f'(z) &= (u_r(r,\theta) + \mathrm{i}v_r(r,\theta))\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ &= \frac{1}{r}\left(-\sin(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta} + \mathrm{i}\cos(\ln r)\mathrm{e}^{-\theta}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\\ &= \frac{\mathrm{i}}{z}f(z), \end{aligned}$$

in accordo con il fatto che $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\log z} = z^{\mathrm{i}}$. Il dominio di analiticità di f è $D = \{z \in \mathbb{C} :\ z \neq -t,\ t \in [0,\infty)\}$.

Esercizio 4 Calcolare il residuo in $z = 0$ delle funzioni

$$f_n(z) = \frac{z^{-n}}{(z-1)^2(z-2)}, \qquad n = 1, 2, 3, 4.$$

Determinare una funzione $g(z)$, polidroma ma analitica in $z = 0$, tale che $f_2(z)g(z)$ abbia un polo doppio in $z = 0$ con residuo nullo.

[punteggio 6]

Per $n \geq 1$ intero, la funzione $f_n(z)$ ha un polo semplice in $z = 2$, doppio in $z = 1$, di ordine n in $z = 0$ ed è altrove analitica. Nella regione $0 < |z| < 1$ essa è sviluppabile in serie di Laurent e, ricordando il risultato notevole della serie geometrica, si ha

$$\begin{aligned}
f_n(z) &= \frac{1}{z^n}\left(\frac{1}{1-z}\right)^2\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}\right) \\
&= -\frac{1}{2z^n}\left(1 + z + z^2 + z^3 + \dots\right)^2\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{2z^n}\left(1 + 2z + 3z^2 + 4z^3 + \dots\right)\left(1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{8} + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{2z^n}\left(1 + \frac{5}{2}z + \frac{17}{4}z^2 + \frac{49}{8}z^3 + \dots\right) \\
&= -\frac{1}{2}z^{-n} - \frac{5}{4}z^{1-n} - \frac{17}{8}z^{2-n} - \frac{49}{16}z^{3-n} + O(z^{4-n}).
\end{aligned}$$

Da questa espressione segue immediatamente

$$\begin{aligned}
&\operatorname*{Res}_{z=0} f_1(z) = -\frac{1}{2}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} f_2(z) = -\frac{5}{4}, \\
&\operatorname*{Res}_{z=0} f_3(z) = -\frac{17}{8}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=0} f_4(z) = -\frac{49}{16}.
\end{aligned}$$

Se $g(z)$ è analitica in $z = 0$, essa è sviluppabile in serie di potenze intorno a $z = 0$, cioè $\exists r > 0$ tale che $\forall z \in B(0, r)$ si ha

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Allora per $0 < |z| < \min(1, r)$ risulta

$$\begin{aligned}
f_2(z)g(z) &= \left(-\frac{1}{2z^2} - \frac{5}{4z} - \frac{17}{8} - \frac{49}{16}z + \dots\right)\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots\right) \\
&= -\frac{a_0}{2}\frac{1}{z^2} + \left(-\frac{5}{4}a_0 - \frac{1}{2}a_1\right)\frac{1}{z} + O(z^0).
\end{aligned}$$

Si ha un polo doppio se $a_0 \neq 0$ e un residuo nullo se $a_1/a_0 = -5/2$. La funzione polidroma $g(z) = (1 + z)^{-5/2}$ risponde ai requisiti richiesti.

<u>Esercizio 5</u> Sia $f : D \mapsto \mathbb{C}$ analitica in $D \subset \mathbb{C}$ aperto e connesso. Dimostrare che se esiste almeno un punto $z_0 \in D$ tale che $f^{(k)}(z_0) = 0$ per ogni ordine $k \geq 0$ allora f è identicamente nulla in D.

[punteggio 5]

Sia $A = \{z \in D : \ f^{(k)}(z) = 0 \ \forall k \geq 0\}$. Per ipotesi $A \neq \emptyset$. Basta allora mostrare che A è contemporaneamente aperto e chiuso in D, per concludere, essendo D connesso, che $A = D$ e quindi f identicamente nulla in D. Mostriamo che $\overline{A} \subset A$ e quindi che A è chiuso. Si consideri un arbitrario $z \in \overline{A}$ e sia (z_j) una successione di punti $z_j \in A$ convergenti a z. Poiché $f^{(k)}$ è, per ogni k, una funzione continua, segue che $f^{(k)}(z) = \lim_{j\to\infty} f^{(k)}(z_j) = 0$. Pertanto $z \in A$. Per dimostrare che A è aperto in D, si consideri un arbitrario punto $z \in A$. Poiché $z \in D$ e D è aperto, $\exists r > 0$ tale che $B(z, r) \subset D$. Allora $\forall w \in B(z, r)$ si ha $f(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(w - z)^k = 0$ in quanto $a_k = f^{(k)}(z)/k! = 0$. Derivando più volte la stessa serie segue $f^{(k)}(w) = 0 \ \forall k \geq 0$, cioè $w \in A$. Si conclude che $B(z, r) \subset A$ e quindi A è aperto.

Una dimostrazione alternativa, meno formale, è la seguente. Si consideri un arbitrario punto $z \in D$. Poiché D è aperto e connesso, esiste una poligonale P contenuta in D che congiunge z_0 a z. Sia $r > 0$ la minima distanza di P dalla frontiera di D e siano z_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ con $z_n = z$, un insieme di $n+1$ punti di P tali che $|z_{j+1} - z_j| < r$. Poiché f è analitica in $B(z_0, r) \subset D$, essa è in tale palla sviluppabile in serie di Taylor e per $z_1 \in B(z_0, r)$ risulta

$$f(z_1) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z_1 - z_0)^k = 0.$$

Derivando k volte questa relazione rispetto a z_1 concludiamo che $f^{(k)}(z_1) = 0$ per ogni ordine $k \geq 0$. Lo stesso ragionamento applicato alla palla $B(z_1, r) \ni z_2$ permette di concludere che $f^{(k)}(z_2) = 0$ per ogni ordine $k \geq 0$. Proseguendo fino alla palla $B(z_{n-1}, r) \ni z_n$ concludiamo che $f(z) = 0$. Dall'arbitrarietà di z segue l'asserto.

Esercizio 6 Dimostrare la convergenza e calcolare il valore dell'integrale improprio

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-wx^2}\mathrm{d}x, \qquad w \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{Re}\, w > 0.$$

Si ricordi che $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$.

[punteggio 6]

Posto $w = |w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, deve essere $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Si integri la funzione $f(z) = \mathrm{e}^{-wz^2}$, analitica in tutto $\mathbb{C}$, lungo il cammino chiuso semplice $\gamma = \lambda_1 + \gamma_R + \lambda_2$, dove

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(x) = x, \qquad 0 \le x \le R,\\
&\gamma_R(\theta) = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, \qquad 0 \le \theta \le -\alpha/2 \text{ se } \alpha < 0, \quad 0 \ge \theta \ge -\alpha/2 \text{ se } \alpha > 0,\\
&\lambda_2(r) = r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}, \qquad R \ge r \ge 0.
\end{aligned}$$

Si noti che il cammino è orientato positivamente se $\alpha < 0$ e negativamente se $\alpha > 0$ mentre per $\alpha = 0$, cioè quando $\mathrm{Im}\, w = 0$, l'integrale in esame è noto e vale $\sqrt{\pi}/(2\sqrt{w})$. Poiché f è analitica su e dentro γ, risulta

$$\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z = \int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

Gli integrali lungo i cammini λ_1 e λ_2 valgono

$$\int_{\lambda_1} f(z)\mathrm{d}z = \int_0^R \mathrm{e}^{-wx^2}\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\lambda_2} f(z)\mathrm{d}z = \int_R^0 \mathrm{e}^{-|w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}(r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2})^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\mathrm{d}r = -|w|^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\int_0^{R|w|^{1/2}} \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u.$$

Usando la disuguaglianza di Jordan, per l'integrale lungo γ_R si ha

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\gamma_R} f(z)\mathrm{d}z\right| &\le -\operatorname{sgn}(\alpha)\int_0^{-\alpha/2} \left|\mathrm{e}^{-|w|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}R^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\theta}}\ \mathrm{i}R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right| \mathrm{d}\theta\\
&= \operatorname{sgn}(\alpha)\frac{R}{2}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-|w|R^2\sin\varphi}\mathrm{d}\varphi \qquad \text{dove } \varphi = \pi/2 - \alpha - 2\theta\\
&\le \operatorname{sgn}(\alpha)\frac{R}{2}\int_{\pi/2-\alpha}^{\pi/2} \mathrm{e}^{-|w|R^2 2\varphi/\pi}\mathrm{d}\varphi\\
&= \frac{\pi\mathrm{e}^{-|w|R^2}\operatorname{sgn}(\alpha)\left(\mathrm{e}^{(1-2\alpha/\pi)} - 1\right)}{4|w|R} \xrightarrow{R\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Nel limite $R \to \infty$ si conclude che $\forall w \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\, w > 0$ vale

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-wx^2}\mathrm{d}x = |w|^{-1/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\alpha/2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{w}},$$

dove $\sqrt{w} = |w|^{1/2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha/2}$.