MODELLI E METODI MATEMATICI DELLA FISICA
A.A. 2009/2010 – Prof. C. Presilla

Prova in itinere 3 Giugno 2010

Cognome	
Nome	

II anno	
III anno o successivi	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

Esercizio 1 Nei casi seguenti, se $\|\cdot\|$ è una norma sullo spazio vettoriale V dire semplicemente che è una norma, mentre se non lo è dimostrare esplicitamente che viola una delle proprietà della norma.

1. $V = \mathbb{R}^3$ e $\|x\| = \exp(|x_1| + |x_2| + |x_3|) - 1$;
2. $V = \ell_4$ e $\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3}$;
3. $V = \ell_1$ e $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^3\right)^{1/3}$;
4. $V = C_b(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$;
5. $V = C_0(\mathbb{R})$ e $\|f\| = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \frac{1}{1+|x|} dx$.

[punteggio 5]

---

1. No. Risulta $\|cx\| \neq |c| \, \|x\|$.
2. No. Si prenda $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$ con $x_k = k^{-1/3}$. Allora

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^4 = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-4/3} < \infty$$

   cioè $x \in \ell_4$ ma

   $$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k| / k^{2/3} = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1} = \infty.$$

3. Sì.
4. Sì.
5. No. Si prenda $f(x) = 1/\log(2 + |x|)$ per la quale risulta $\|f\| = \infty$.

Esercizio 2 Determinare se lo spazio vettoriale $(\ell_\infty, \|\cdot\|)$, dove $\|x\| = \sup_k |x_k|/k$, è completo. In caso positivo dimostrarlo, in caso negativo fornire un esempio.

[punteggio 5]

Lo spazio vettoriale in questione non è completo. Si consideri la successione di vettori $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ definiti da

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \sqrt{k} & k \leq n \\ 0 & k > n \end{cases}$$

Poiché $\left\|x^{(n)}\right\| = \sup_k \left|x_k^{(n)}\right|/k = \sup_{1\leq k\leq n} 1/\sqrt{k} = 1$, si ha che $x^{(n)} \in (\ell_\infty, \|\cdot\|)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ è di Cauchy. Infatti, posto $m > n$, si ha

$$\left\|x^{(n)} - x^{(m)}\right\| = \sup_k \frac{\left|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\right|}{k} = \sup_{n+1\leq k\leq m} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

La successione tuttavia non è convergente nello spazio vettoriale considerato. Infatti, si ha $\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)} - x\right\| = 0$ con $x = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots) \notin (\ell_\infty, \|\cdot\|)$.

Esercizio 3 Dimostrare che $C_c(\mathbb{R})$ è denso in $(C_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$.

[punteggio 5]

Sia $f \in C_0(\mathbb{R})$ arbitraria e si ponga

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & |x| \leq n \\ f(\operatorname{sgn}(x)n)(n+1-|x|) & n < |x| \leq n+1 \\ 0 & |x| > n+1 \end{cases}$$

Risulta $f_n \in C_c(\mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$. La successione $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge in norma uniforme a f. Infatti

$$\|f - f_n\|_u = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| \leq |f(-n)| + |f(n)| + \sup_{|x| \geq n} |f(x)| \,.$$

Poiché $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0$ segue che $\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_u = 0$.

<u>Esercizio 4</u> Dimostrare che non esiste un prodotto scalare in $(C_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_u)$ tale che $\|f\|_u^2 = \langle f, f\rangle \ \forall f \in C_c(\mathbb{R})$.

[punteggio 6]

Si considerino le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x-2| & |x-2| \leq 1 \\ 0 & |x-2| > 1 \end{cases}$$

Risulta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ con $\|f\|_u = 1$, $\|g\|_u = 1$, $\|f+g\|_u = 1$ e $\|f-g\|_u = 1$.
La regola del parallelogramma

$$\|f+g\|_u^2 + \|f-g\|_u^2 = 2(\|f\|_u^2 + \|g\|_u^2)$$

è quindi violata.
Come secondo esempio, si considerino le due funzioni

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \sin^2 x & x \in [0, 2\pi] \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Risulta $f, g \in C_c(\mathbb{R})$ con $\|f\|_u = \|g\|_u = 1$ e $\|f+g\|_u = \|f-g\|_u = 2$. La regola del parallelogramma si legge ora $2^2 + 2^2 = 2(1^2 + 1^2)$ ed è quindi violata.

Esercizio 5 Sia $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uno spazio euclideo e $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ un sistema ortogonale di vettori in V. Dato un generico $v \in V$, definire i coefficienti di Fourier di v rispetto ai vettori $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ e dimostrare la disugualianza di Bessel.

[punteggio 6]

Vedi *Rudimenti di analisi infinito dimensionale*, pagina 89, osservando che il sistema di vettori qui considerati è ortogonale non ortonormale.

Esercizio 6 Nello spazio vettoriale $P[0, \infty)$ con prodotto scalare $\langle f, g\rangle = \int_0^\infty f(x)g(x)e^{-x}dx$ sia $W = \mathrm{span}\{x, x^2\}$. Determinare la decomposizione del vettore $v(x) = x^n$, dove n è un intero non negativo, in $v = w + z$ con $w \in W$ e $z \in W^\perp$. Si ricordi che $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$.

[punteggio 6]

Si ortogonalizzi secondo Gram-Schmidt il sistema di vettori $\{x, x^2\}$

$$u_1(x) = x$$

$$\|u_1\|^2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x}dx = 2$$

$$u_2(x) = x^2 - \frac{\langle x^2, u_1\rangle}{\|u_1\|^2}u_1(x) = x^2 - 3x$$

$$\|u_2\|^2 = \int_0^\infty \left(x^2 - 3x\right)^2 e^{-x}dx = 24 + 18 - 36 = 6.$$

Usando il proiettore π_W si ha

$$w = \pi_W(v) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\langle v, u_k\rangle}{\|u_k\|^2}u_k$$

ovvero

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{\langle x^n, x\rangle}{2}x + \frac{\langle x^n, x^2 - 3x\rangle}{6}(x^2 - 3x) \\ &= \frac{(n+1)!}{2}x + \frac{(n+2)! - 3(n+1)!}{6}(x^2 - 3x) \\ &= \frac{4(n+1)! - (n+2)!}{2}x + \frac{(n+2)! - 3(n+1)!}{6}x^2 \end{aligned}$$

e quindi

$$z(x) = v(x) - w(x) = x^n - \frac{4(n+1)! - (n+2)!}{2}x - \frac{(n+2)! - 3(n+1)!}{6}x^2.$$

Si osservi, per verifica, che per $n = 1$ si ha $w(x) = x$.